# Projet M3: paramètres optimaux dans un modèle d'écoulement sanguin

Laurent Dumas

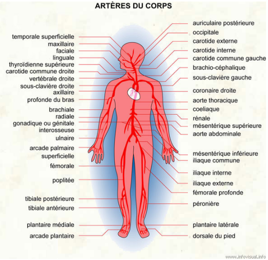
Laboratoire de Mathématiques de Versailles
Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines

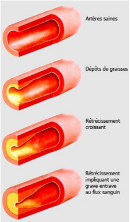
Module M3

http://dumas.perso.math.cnrs/M3.html

# Présentation du problème

- La modélisation et la simulation numérique des écoulements sanguins dans l'arbre artériel est un problème général complexe car elle nécessite des simulations tridimensionnelles avec interaction fluide-structure.



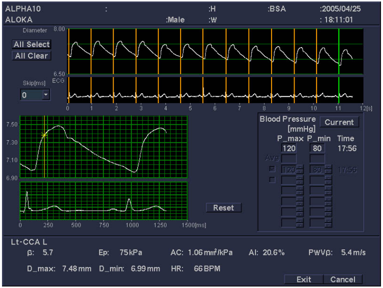

- Une des difficultés de cette modélisation est la détermination précise des nombreux paramètres du modèle pour un patient donné.

# Présentation du problème

- Afin de réduire les coûts de telles simulations, des modèles simplifiés monodimensionnels d'interaction fluide structure avec bifurcation d'artères ont été développés.
- Le but est ici de reconstruire fidèlement à l'aide de mesures non invasives toutes les variables hémodynamiques et mécaniques d'un patient donné (pression, vitesse, modules de Young, etc...) pour l'ensemble de son réseau artériel.
- Grâce à une telle reconstruction, le praticien disposera d'informations utiles à un dépistage précoce des principales maladies cardiovasculaires.

# Dispositif expérimental

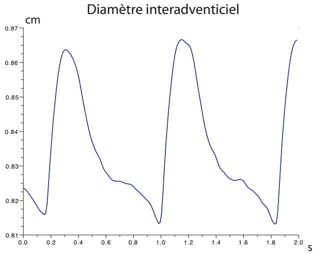
- Le processus expérimental, non invasif et bien adapté au problème, est déjà disponible et s'appelle l'echotracking.

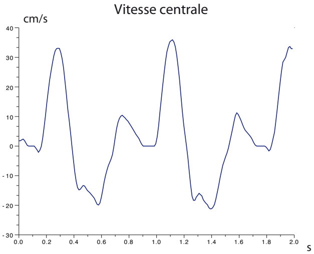



- Il mesure à l'aide de techniques Doppler, les diamètres artériels et les vitesses centrales à diverses positions du réseau artériel.

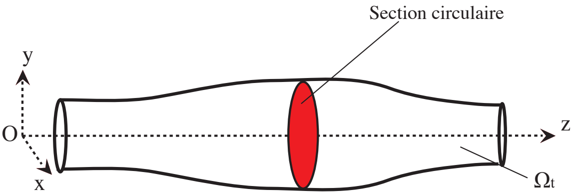
# Dispositif expérimental

- Les données d'echotracking utilisées ici ont été fournies par l'équipe de pharmacologie de l'Hopital Georges Pompidou.
- Parmi les données disponibles pour différents patients, les mesures temporelles de diamètre d'artère et de vitesse centrale seront utilisées ici :



# Modélisation du flux sanguin : hypothèses




- Pour chaque artère, le domaine $\Omega_t$ est cylindrique, orienté selon Oz, et de longueur constante L.
- Les quantités impliquées sont supposées constantes sur chaque section de l'artère.
- Références : *Formaggia, Nobile, Quarteroni* (2001),*Sherwin et al.* (2003), *Gerbeau et al.* (2005).

# Dérivation des équations du modèle

- Après intégration des équations de Navier Stokes sur chaque section, on obtient le système d'inconnues $A_i(t,z)$ (section de l'artère) et $Q_i(t,z)$ (débit moyen) relatif à l'artère $i$ :

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial Q_i}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q_i^2}{A_i}\right) + \frac{A_i}{\rho}\frac{\partial P_i}{\partial z} + K_r \frac{Q_i}{A_i} = 0$$

- Une loi de comportement linéaire élastique complète le système :

$$P_i - P_{ext} = \beta_i(z)\left(\sqrt{A_i(z,t)} - \sqrt{A_{0,i}(z)}\right)$$

# Les paramètres du modèle

- Le paramètre $K_r$ représente la résistance visqueuse de l'écoulement par unité de longueur du tube et est considéré connu dans cette étude.
- Les principaux paramètres devant être estimés sont les coefficients $\beta_i$ de chaque artère. Cette valeur, proportionnelle à la rigidité de l'artère peut être constante ou dépendre de $z$.
- Un autre paramètre important du modèle est la section de l'artère $i$ au repos $z \to A_{0,i}(z)$.

# Forme conservative du modèle

- Le modèle précédent peut être récrit sous forme conservative :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}F(U)}{\mathrm{d}z} = B(U)$$

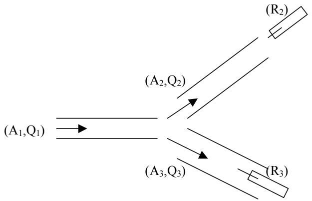
où $U = (A, Q)^t$ et $F(U) = \begin{pmatrix} Q \\ \dfrac{Q^2}{A} + \dfrac{\beta}{3\rho} A^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$.

- Il peut être observé que ce système est hyperbolique et que le Jacobien $H = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}U}$ admet toujours deux valeurs propres réelles de signe opposé pour les valeurs admissibles de $U$ :
$\lambda_i = \frac{Q}{A} \pm c$ où

$$c = \sqrt{\frac{A}{\rho}\frac{\partial p}{\partial A}}$$

# Conditions aux limites

- Le système est complété par deux conditions aux limites appropriées pour les variables caractéristiques $W_1$ et $W_2$. En particulier, une pression (ou une section) peut être imposée en entrée.
- Aux bifurcations, trois conditions additionnelles sont imposées (conservation de la masse et deux conditions sur la pression).
- Aux sorties, une condition numérique artificielle correspondant à une résistance équivalente du réseau en aval est imposée.



# Résolution numérique du problème direct

- Les équations du modèle 1D sont discrétisées en temps sous leur forme conservative, en utilisant un schéma de Taylor-Galerkin au second ordre.
- La discrétisation spatiale est alors réalisée à l'aide d'éléments finis linéaires sur une subdivision de $[0, L]$.
- A chaque itération en temps, une méthode de Newton permet de déterminer les 6 inconnues aux points de bifurcation.

# Problème inverse : la fonction coût

- En vue de la construction d'un réseau artériel utilisant les résultats d'un echotracking, la foncion coût à minimiser est du type suivant :

$$J(\beta_i, \ldots) = \sum_{pts \in \{P_1, \ldots, P_N\}} \sum_{i=1}^{M} (errA(t_i, pts) + errQ(t_i, pts))$$

avec

$$\begin{cases} errA(t_i, pts) = |A(t_i, pts) - A_{exp}(t_i, pts)|^2 \\ errQ(t_i, pts) = |Q(t_i, pts) - Q_{exp}(t_i, pts)|^2 \end{cases}$$

- Les nombres minimaux $N$ de points en espace et $M$ de points en temps, permettant de reconstruire correctement le flux sanguin $\beta$ doivent en particulier être déterminés.

# Problème d'optimisation à résoudre

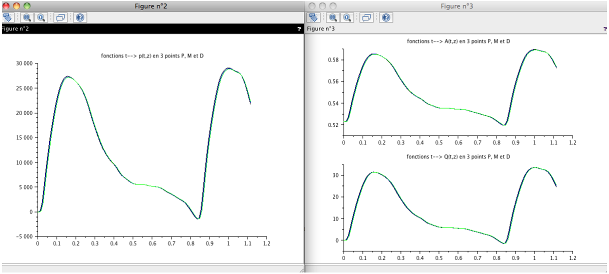
- Le problème inverse précédent se ramène à la recherche de l'optimum global d'une fonction $J : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- Dans le cas présent, la fonction $J$ est évaluée à partir de la résolution d'une EDP ou d'un système d'EDP, ici le système couplé d'EDP sur le réseau d'artères. Il est donc nécessaire de recourir à une méthode d'optimisation sans gradient.
- Le choix se porte ici sur une méthode globale, en l'occurence la méthode PSO.

# Objectif du projet

- Etape 1 (séance 1) : implémentation du modèle 1D dans le cas de trois artères avec une bifurcation.
- Etape 2 (séance 2 et 3) : résolution du problème inverse sur le cas précédent à partir de données expérimentales fournies.

# Detail de l'étape 1

L'étape 1 consiste à prendre en main le schéma de Taylor Galerkin pour une artère avec conditions de sortie libres et pour une données d'entrée expérimentale de type profil de section puis à rajouter les conditions aux bifurcations et les conditions en sortie toujours avec la même donnée d'entrée.



# Detail de l'étape 2

L'étape 2 consiste à coupler le code PSO avec le code construit à l'étape 1 pour déterminer les rigidités inconnues des 3 artères ainsi que les résistances en sortie qui permettent de retrouver au mieux les données expérimentales fournies.