

Simulation de l'écoulement dans le réseau artériel. Résolution du problème inverse associé. Etude de robustesse

Laurent Dumas

Laboratoire de Mathématiques de Versailles
Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines

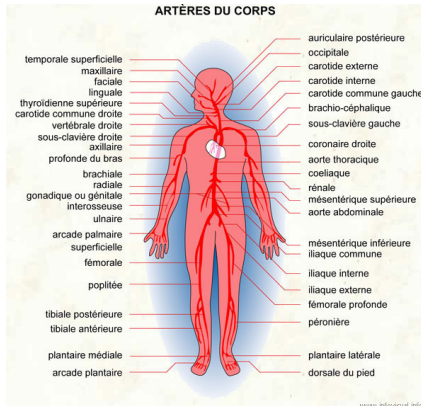
Collaborations: T. El Bouti, D. Lucor, P. Boutouyrie

- 1 Modélisation des écoulements sanguins
- 2 Résolution numérique du problème direct
- 3 Résolution numérique du problème inverse
- 4 Etude de robustesse

- 1 Modélisation des écoulements sanguins
- 2 Résolution numérique du problème direct
- 3 Résolution numérique du problème inverse
- 4 Etude de robustesse

Présentation du problème

- L'objectif est de reconstruire numériquement pour un patient donné, l'écoulement dans l'ensemble (ou dans une partie) de son réseau artériel à l'aide de mesures non invasives.

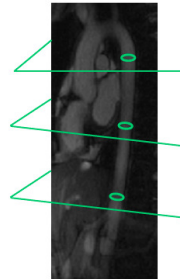


Présentation du problème

- Grâce à une telle reconstruction, le praticien disposera d'informations utiles à un dépistage des maladies cardiovasculaires.
- La modélisation des écoulements sanguins dans l'arbre artériel est un problème général complexe car elle nécessite des simulations tridimensionnelles avec interaction fluide-structure.
- Une autre difficulté de cette modélisation réside dans la détermination des nombreux paramètres du modèle pour un patient donné.

Dispositifs expérimentaux

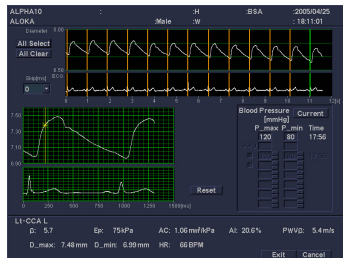
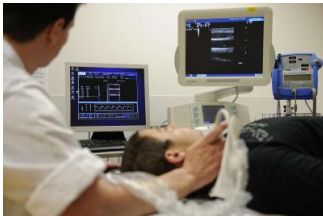
- Un premier dispositif expérimental bien adapté au problème est l'**IRM**.



- Elle permet de mesurer des profils de vitesse et de section dans des artères internes comme l'artère aorte, en différents plans de coupe.

Dispositifs expérimentaux

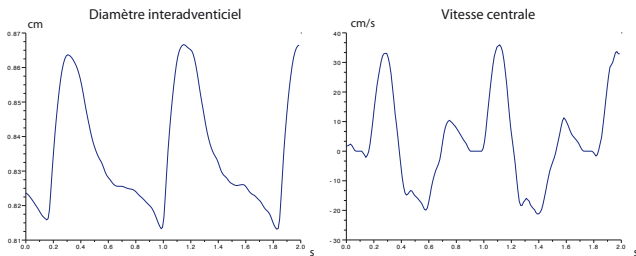
- Un second dispositif expérimental non invasif bien adapté aux artères périphériques s'appelle l'**echotracking**.



- Il mesure à l'aide de techniques Doppler, les diamètres artériels et les vitesses centrales à diverses positions du réseau artériel.

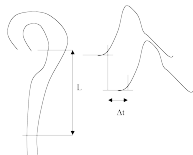
Dispositifs expérimentaux

- Les données d'echotracking ou d'IRM utilisées ici ont été fournies par l'équipe PARCC de l'Hôpital Georges Pompidou.
- Parmi les données disponibles pour différents patients, on utilisera ici **les profils temporels de diamètre et de vitesse moyenne pour plusieurs artères.**



Dépistage expérimental des maladies cardiovasculaires

- Le test de dépistage des maladies cardiovasculaires est basé sur le calcul d'un paramètre appelé VOP (Vitesse de l'Onde de Pouls)

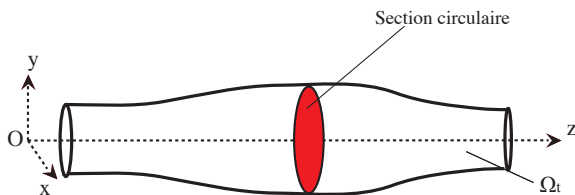


- Ce coefficient est relié à la rigidité de l'artère à l'aide de la relation :

$$VOP = \frac{L}{\Delta t} = \sqrt{\frac{Eh}{2r\rho}}$$

où E désigne le module de Young de l'artère.

Modélisation numérique du flux sanguin : hypothèses



- Pour chaque artère, le domaine Ω_t est cylindrique, orienté selon Oz, et de longueur constante L.
- Les quantités impliquées sont supposées constantes sur chaque section de l'artère.
- Références : *Formaggia, Nobile, Quarteroni (2001), Sherwin et al. (2003), Gerbeau et al. (2005)*.

Dérivation des équations du modèle

- Après intégration des équations de Navier Stokes sur chaque section, on obtient le système d'inconnues $A_i(t, z)$ (section de l'artère) et $Q_i(t, z)$ (débit moyen) relatif à l'artère i :

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial Q_i}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q_i^2}{A_i} \right) + \frac{A_i}{\rho} \frac{\partial P_i}{\partial z} + K_r \frac{Q_i}{A_i} = 0$$

- Une loi de comportement linéaire élastique complète le système :

$$P_i - P_{ext} = \beta_i \left(\sqrt{A_i(z, t)} - \sqrt{A_{0,i}} \right)$$

Les paramètres du modèle

- Le paramètre K_r représente la résistance visqueuse de l'écoulement par unité de longueur du tube et est considéré connu dans cette étude.
- Les principaux paramètres devant être estimés sont **les coefficients β_i de chaque artère**. Cette valeur, proportionnelle à la rigidité de l'artère, possède une valeur théorique issu d'une moyennisation formelle :

$$\beta_i = \frac{4\sqrt{\pi}h_0E_i}{3A_0}$$

où h_0 et E_i représentent respectivement l'épaisseur et le module de Young de l'artère i .

- Les autres paramètres importants du modèle sont **les sections des artères au repos $A_{0,i}$** .

Forme conservative du modèle

- Le modèle précédent peut être réécrit sous forme conservative :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial z} = B(U)$$

où $U = (A, Q)^t$ et $F(U) = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + \frac{\beta}{3\rho} A^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$.

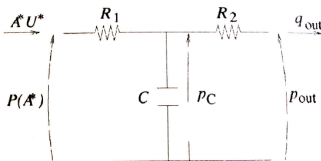
- Il peut être observé que ce système est hyperbolique et que le Jacobien $H = \frac{\partial F}{\partial U}$ admet toujours deux valeurs propres réelles de signe opposé pour les valeurs admissibles de U :

$$\lambda_i = \frac{Q}{A} \pm c \text{ où}$$

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{2\rho}} A^{\frac{1}{4}}$$

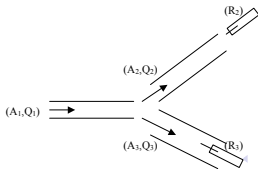
Conditions aux limites

- Le système est complété par deux conditions aux limites appropriées pour les variables caractéristiques W_1 (associée à $\lambda_1 > 0$) et W_2 (associée à $\lambda_2 < 0$) .
- **En entrée**, une pression (ou **une section**) peut être **imposée**.
- **Aux sorties**, **une condition numérique artificielle** est imposée, correspondant soit à une résistance équivalente du réseau en aval, soit à un modèle 0D analogue à un réseau électrique, par exemple RCR.



Conditions aux bifurcations

- Aux bifurcations, **trois conditions physiques** sont imposées : la conservation du débit et et deux conditions de conservation de la pression totale.
- Ces trois conditions peuvent être complétées par un système de **trois équations traduisant la conservation des variables sortantes**, W_1 ou W_2 pour chaque artère, le long des caractéristiques.
- Le système à 6 équations et 6 inconnues ainsi obtenu sera résolu numériquement afin de déterminer au temps suivant les valeurs de A et Q au point de bifurcation.



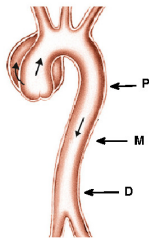
- 1 Modélisation des écoulements sanguins
- 2 Résolution numérique du problème direct**
- 3 Résolution numérique du problème inverse
- 4 Etude de robustesse

Discrétisation numérique

- Deux types de discrétisation du système d'EDP hyperboliques ont été testés ici.
- La première méthode, de type **Taylor Galerkin**, consiste à discrétiser les équations en temps en utilisant un schéma du second ordre, puis à effectuer une discrétisation spatiale par éléments finis P1.
- La seconde méthode, de type **Galerkin discontinu**, consiste à utiliser une base de fonctions polynômiales non forcément continues aux noeuds et dans lequel le flux à l'interface est calculé en résolvant un problème élémentaire de Riemann.
- Les résultats obtenus sont du même ordre de précision. La méthode DG sera utilisée ici en raison de son coût moindre.

Premier exemple : écoulement dans l'aorte

- La première simulation consiste à **reconstruire l'écoulement dans l'aorte descendante d'un patient nommé T1** à l'aide de mesures IRM à trois niveaux.

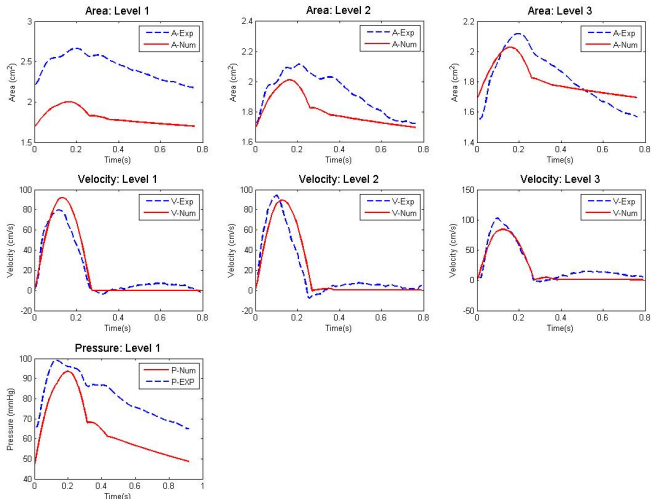


- L'objectif est de vérifier la qualité de la reconstruction de la pression en comparant celle-ci avec une mesure effectuée par tonométrie sur l'artère carotide.

Premier exemple : paramètres pour le patient T1

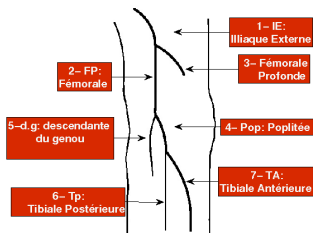
- L'aorte est supposée de diamètre constant et le débit expérimental est imposé en entrée.
- Les valeurs des paramètres de l'aorte sont choisis :
 - soit avec des données de la littérature pour β ,
 - soit avec des données mesurées pour A_0 (moyenne des 3 sections mesurées aux 3 plans).
- En sortie, des conditions de type RCR sont imposées.

Premier exemple : résultats pour le patient T1



Second exemple : écoulement dans les membres inférieurs

- La seconde simulation consiste à **reconstruire le réseau artériel des membres inférieurs de deux patients sains, nommés P1 et P2**, à l'aide de mesures non invasives par echotracking en quelques points du réseau.

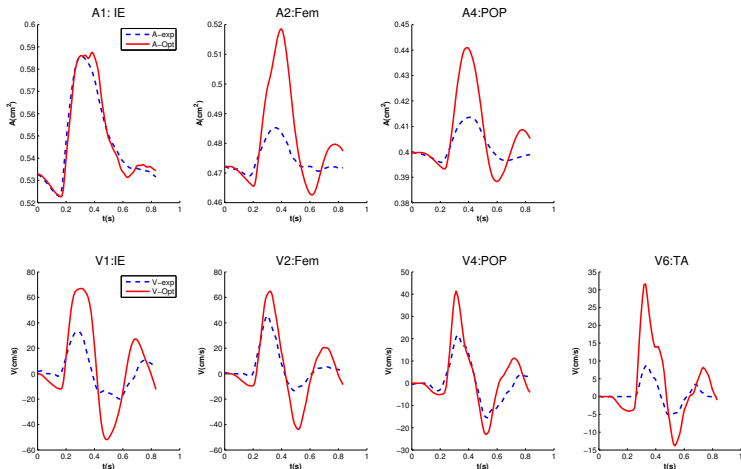


- L'objectif est de déterminer les valeurs de VOP locales dans chaque artère pour une aide au diagnostic médical.

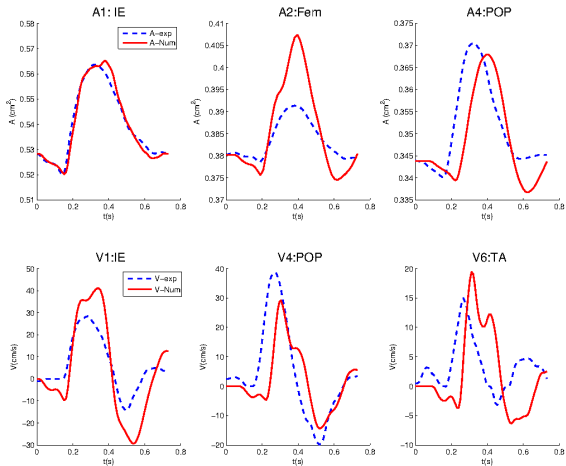
Second exemple : paramètres des patients P1 et P2

- La section expérimentale mesurée pour l'artère iliaque est imposé en entrée.
- Les valeurs des paramètres du réseau sont choisis
 - soit avec des données de la littérature pour $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 7}$
 - soit avec des données mesurées pour certains $A_{0,i}$ (pour les artères 1, 2 et 4) ou des valeurs estimées pour les autres.
- Aux quatre sorties, des conditions de type résistance sont imposées.

Second exemple : résultats pour le patient P1



Second exemple : résultats pour le patient P2



- 1 Modélisation des écoulements sanguins
- 2 Résolution numérique du problème direct
- 3 Résolution numérique du problème inverse**
- 4 Etude de robustesse

Problème inverse : la fonction coût

- Afin de déterminer les paramètres optimaux du modèle d'écoulement, la fonction coût à minimiser est du type suivant :

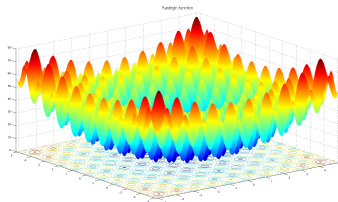
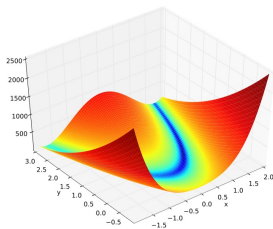
$$J(\beta_i, A_{0,i}) = \sum_{pts \in \{P_1, \dots, P_N\}} \sum_{i=1}^M (errA(t_i, pts) + errQ(t_i, pts))$$

avec

$$\begin{cases} errA(t_i, pts) = |A(t_i, pts) - A_{exp}(t_i, pts)|^2 \\ errQ(t_i, pts) = |Q(t_i, pts) - Q_{exp}(t_i, pts)|^2 \end{cases}$$

Problème d'optimisation à résoudre

- Le problème inverse précédent se ramène à la recherche de l'**optimum global** d'une fonction $J : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
- Dans le cas présent, la fonction J est évaluée à partir de la résolution d'une EDP ou d'un système d'EDP, ici le système couplé d'EDP sur le réseau d'artères.



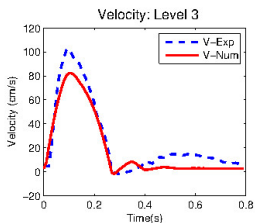
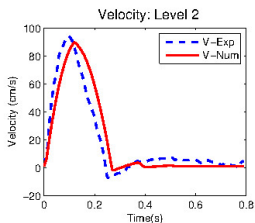
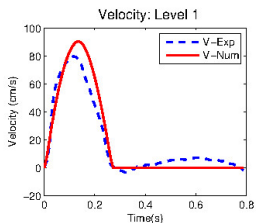
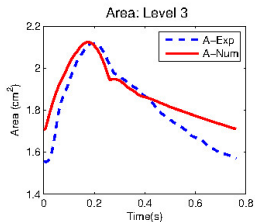
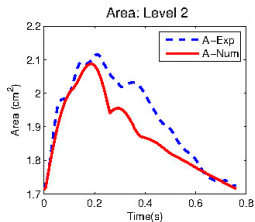
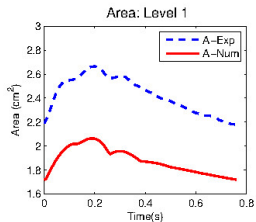
Méthodes d'optimisation sans gradient

- L'estimation du gradient de la fonction est dans le cas présent difficile à obtenir, d'où la nécessité de recourir à des méthodes d'**optimisation sans dérivées**.
- En raison du nombre relativement faible de paramètres du modèle et de son coût d'évaluation réduit, il est possible d'utiliser ici une **méthode de type évolutionnaire** comme CMA-ES.

Premier exemple : cas du patient T1

- La fonction coût à minimiser est construite à partir des 3 mesures de section et de débit réalisées par IRM .
- Les paramètres à déterminer sont :
 - Le coefficient β de rigidité de l'aorte,
 - Le coefficient A_0 de section au repos de l'artère,
 - Les coefficients $R = R_1 + R_2$ et C du modèle en sortie.

Résultats après optimisation, patient T1



Résultats après optimisation, patient T1

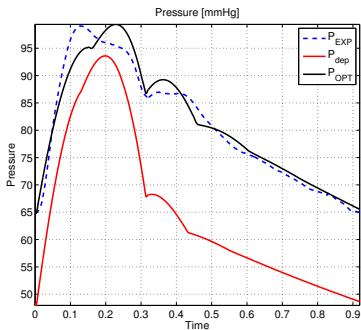
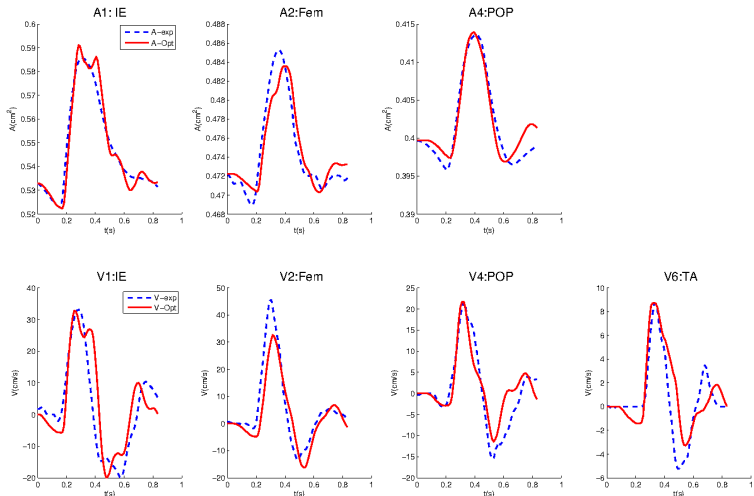


FIGURE: pression

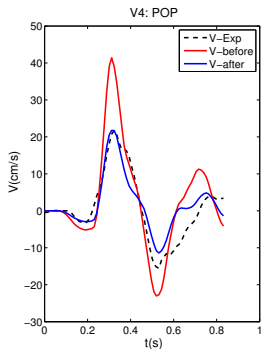
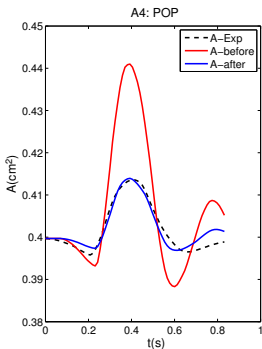
Second exemple : cas du patient P1

- La fonction coût à minimiser est construite à partir des 4 mesures réalisées par echotracking (vitesse pour l'artère 1, section et vitesse pour les artères 2, 4 et 6)
- Les paramètres du modèle à déterminer sont :
 - Les 7 coefficients β_i de chacune des artères du réseau,
 - Les 4 coefficients $A_{0,i}$ des artères non mesurées, $i \in \{3, 5, 6\}$.
 - Les 4 coefficients de résistance R_i réglant les résistance en sortie de réseau $i \in \{3, 5, 6\}$.

Résultats après optimisation 11 paramètres, patient P1



Résultats après optimisation 11 paramètres, patient P1

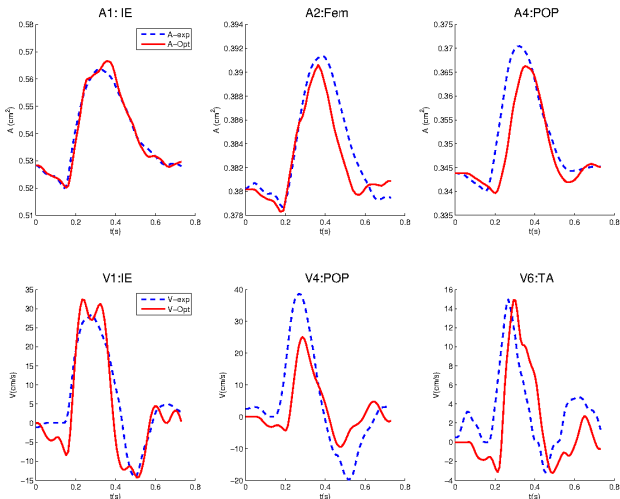


Paramètres optimaux obtenus, patient P1

$A_{0,1}$	0.53 cm ²	c_1	4.9 m/s	Std($A_{0,1}$)	0	Std(c_1)	0.01
$A_{0,2}$	0.47 cm ²	c_2	11.7 m/s	Std($A_{0,2}$)	0	Std(c_2)	0.02
$A_{0,3}$	0.35 cm ²	c_3	8.3 m/s	Std($A_{0,3}$)	0.18	Std(c_3)	0.09
$A_{0,4}$	0.4 cm ²	c_4	10.4 m/s	Std($A_{0,4}$)	0	Std(c_4)	0.01
$A_{0,5}$	0.37 cm ²	c_5	8.4 m/s	Std($A_{0,5}$)	0.13	Std(c_5)	0.09
$A_{0,6}$	0.27 cm ²	c_6	13.1 m/s	Std($A_{0,6}$)	0.11	Std(c_6)	0.012
$A_{0,7}$	0.27 cm ²	c_7	12.1 m/s	Std($A_{0,7}$)	0.10	Std(c_7)	0.05

TABLE: Patient P1 : paramètres moyens obtenus et écart type.

Résultat après optimisation 11 paramètres, patient P2

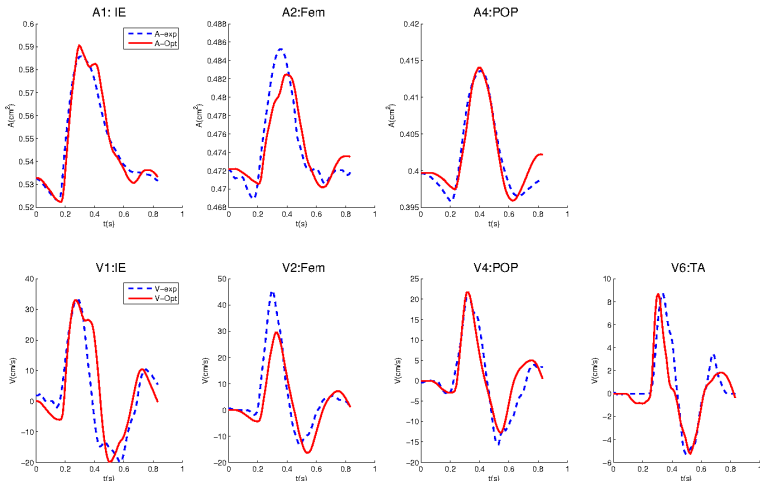


Paramètres optimaux obtenus, patient P2

$A_{0,1}$	0.52 cm ²	c_1	7.2 m/s	Std($A_{0,1}$)	0	Std(c_1)	0.02
$A_{0,2}$	0.38 cm ²	c_2	13.6 m/s	Std($A_{0,2}$)	0	Std(c_2)	0.03
$A_{0,3}$	0.32 cm ²	c_3	8.1 m/s	Std($A_{0,3}$)	0.13	Std(c_3)	0.06
$A_{0,4}$	0.34 cm ²	c_4	9.3 m/s	Std($A_{0,4}$)	0	Std(c_4)	0.03
$A_{0,5}$	0.21 cm ²	c_5	13.9 m/s	Std($A_{0,5}$)	0.15	Std(c_5)	0.05
$A_{0,6}$	0.23 cm ²	c_6	12.6 m/s	Std($A_{0,6}$)	0.12	Std(c_6)	0.09
$A_{0,7}$	0.23 cm ²	c_7	16.3 m/s	Std($A_{0,7}$)	0.109	Std(c_7)	0.09

TABLE: Patient P2 : paramètres moyens obtenus et écart type.

Résultats après optimisation 15 paramètres, patient P1



- 1 Modélisation des écoulements sanguins
- 2 Résolution numérique du problème direct
- 3 Résolution numérique du problème inverse
- 4 Etude de robustesse**

Etude de robustesse

- En complément de l'optimisation des paramètres du modèle, une étude de robustesse de celui-ci vis à vis de ses paramètres a été réalisée.
- La méthode non intrusive de **propagation d'incertitude par polynôme de chaos** a été choisie pour cela.
- Elle consiste à se donner un type d'incertitude en entrée sur différents paramètres (ici suivant une loi uniforme dans un intervalle de variation donné) et à décomposer la solution dans une base de polynômes orthogonaux de la forme :

$$A(x, t, \omega) = \sum_{j=0}^{M-1} a_j(x, t) \psi_j(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$$

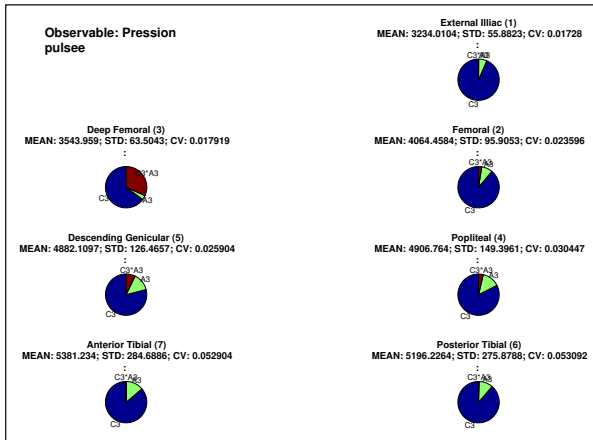
Etude de robustesse

- Différents **paramètres incertains** ont été choisis parmi les paramètres optimisés : résistances en sortie, section et VOP locales, etc...
- D'autres paramètres incertains peuvent être choisis comme la fréquence cardiaque, le débit maximal, etc...
- Différents **observables d'intérêt médical**, ont été testés : pression pulsée locale, indice de réflexion, pression maximale, etc...
- Au final, le praticien dispose non seulement de données fiables sur tout un réseau d'artères mais aussi leur sensibilité à différents effets (comme l'effet "blouse blanche").

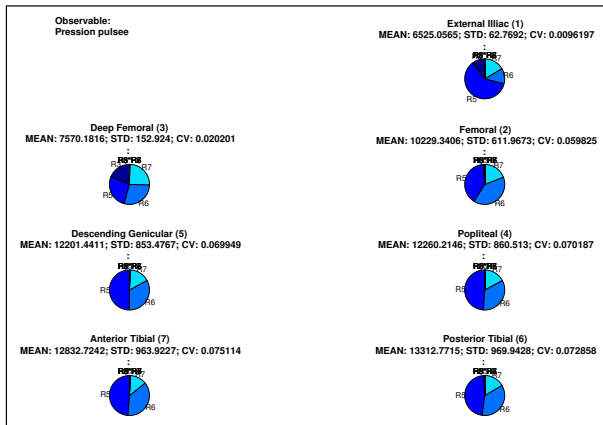
Etude de robustesse

- On présente ici **deux études de robustesse** du modèle du réseau des membres inférieurs du patient P1 :
 - soit **par rapport aux paramètres locaux de la 3ème artère** (VOP et section au repos),
 - soit **par rapport aux 4 résistances de sortie**.
- Le test a été effectué, à la fois sur un cas non optimisé et sur le cas optimisé.
- Une méthode de type Gauss Legendre pour le premier cas ou de type sparse grid pour le second cas été utilisée nécessitant le calcul d'une centaine de problèmes directs.
- Une incertitude de l'ordre de 25% a été choisie sur les paramètres.

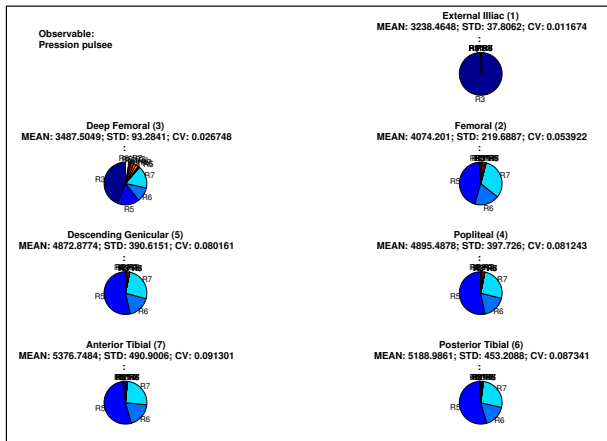
Robustesse aux valeurs de VOP et section, artère 3



Robustesse aux résistances, solution non optimale



Robustesse aux résistances, solution optimale



Conclusions et perspectives

- La simulation numérique est un outil d'aide au diagnostic de plus en plus utilisée dans différents domaines médicaux.
- Les méthodes d'optimisation sans gradient de type évolutionnaires sont les plus efficaces dans ce contexte pour déterminer les paramètres du modèle utilisé, spécifiques à chaque patient.
- Les travaux présentés ici montrent qu'un examen non invasif et peu coûteux comme l'IRM ou l'echotracking couplé à une simulation numérique du flux sanguin pourra améliorer la prédiction des risques de maladies cardiovasculaires.