1

On pose en premier lieu $P(x)$ un polynôme de degrès 3 : $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On a ainsi :

$$\int_0^1 P(x)dx = \int_0^1 ax^3dx + \int_0^1 bx^2dx + \int_0^1 cxdx + \int_0^1 ddx$$

$$\int_0^1 P(x)dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d$$

De plus on a $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ donc on a

$$P(0) + \frac{1}{6}P'(0) + \frac{1}{3}P'(\frac{1}{2}) = d + \frac{c}{6} + \frac{1}{3}(3a\frac{1}{4} + 2b\frac{1}{2} + c)$$

$$P(0) + \frac{1}{6}P'(0) + \frac{1}{3}P'(\frac{1}{2}) = d + \frac{c}{6} + \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3}$$

$$P(0) + \frac{1}{6}P'(0) + \frac{1}{3}P'(\frac{1}{2}) = d + \frac{c}{2} + \frac{a}{4} + \frac{b}{3}$$

$$P(0) + \frac{1}{6}P'(0) + \frac{1}{3}P'(\frac{1}{2}) = \int_0^1 P(x)dx$$

Cette méthode est exacte pour un polynôme de degrès 3, donc est d'ordre au moins 3.
Posons maintenant $Q(x)$ un polynôme de degrès 4 : $Q(x) = x^4$. On a ainsi :

$$\int_0^1 Q(x)dx = \int_0^1 x^4dx = \frac{1}{5}$$

et $Q'(x) = 4x^3$ donc

$$Q(0) + \frac{1}{6}Q'(0) + \frac{1}{3}Q'(\frac{1}{2}) = 0 + \frac{1}{6}0 + \frac{1}{3}4(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{6} \neq \int_0^1 Q(x)dx$$

Cette méthode n'est pas exacte pour les polynômes de degrès 4, donc est d'ordre inférieur à 4.
On a donc bien une méthode d'ordre 3.

2

On pose $f : x \in [0,1] \to max((x-t)^3, 0)$, soit

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leq t \\ (x-t)^3, x \geq t \end{cases}$$

On va donc séparer les cas en fonction de la valeur de t.

Pour $t \leq 0$, on a $\forall x \in [0,1], t \leq x$, donc $f(x) = (x-t)^3$. f est ainsi un polynôme de degrès 3, donc d'après 1,

$$K(t) = E(f) = \int_0^1 f(x)dx - (f(0) + \frac{1}{6}f'(0) + \frac{1}{3}f'(\frac{1}{2})) = 0$$

Pour $t \geq 1$, on a $\forall x \in [0,1], x \leq t$, donc $f(x) = 0$. On a donc

$$K(t) = \int_0^1 0dx - 0 = 0$$

Pour $t \in]0, \frac{1}{2}]$, on a $f(x) = \mathbf{1}_{[t,1]}(x)(x-t)^3$, avec ainsi $f'(x) = 3(x-t)^2$ pour $x \geq t$ et $f'(x) = 0$ pour $x < t$. On a $0 < t$ donc $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, et $\frac{1}{2} \geq t$, donc $f'(\frac{1}{2}) = 3(\frac{1}{2} - t)^2$. On a ainsi

$$K(t) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[t,1]}(x)(x-t)^3 dx - (\frac{1}{3}3(\frac{1}{2} - t)^2)$$

$$K(t) = \int_t^1 (x-t)^3 dx - (\frac{1}{2} - t)^2)$$

$$K(t) = [\frac{(x-t)^4}{4}]_t^1 - (\frac{1}{2} - t)^2 = \frac{(1-t)^4}{4} - (\frac{1}{2} - t)^2$$

$$K(t) = (\frac{(1-t)^2}{2} - \frac{1}{2} + t)(\frac{(1-t)^2}{2} + \frac{1}{2} - t) = \frac{t^2}{2}\underbrace{(\frac{t^2}{2} + 1 - 2t)}_{\geq 1-2t \geq 0} \geq 0$$

Pour $t \in]\frac{1}{2}, 1[$ on a $f(x) = \mathbf{1}_{[t,1]}(x)(x-t)^3$, avec ainsi $f'(x) = 3(x-t)^2$ pour $x \geq t$ et $f'(x) = 0$ pour $x < t$. On a $0 < t$ donc $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, et $\frac{1}{2} < t$ donc $f'(\frac{1}{2}) = 0$. On a ainsi

$$K(t) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[t,1]}(x)(x-t)^3 dx = \frac{(1-t)^4}{4} \geq 0$$

On a donc ainsi la formule gènèrale pour $t \in \mathbb{R}$

$$K(t) = \mathbf{1}_{]0,1[}(t)\frac{(1-t)^4}{4} - \mathbf{1}_{]0,\frac{1}{2}[}(t)(\frac{1}{2} - t)^2$$

3

On pose le changement de variables $g : x \to a_0 + xh$ qui transforme ainsi $[0,1]$ en $[a_0, a_0+h]$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^+$. On a alors

$$\int_{a_0}^{a_0+h} f(t)dt = h\int_0^1 f(g(x))dx \simeq h((f\circ g)(0) + \frac{1}{6}(f\circ g)'(0) + \frac{1}{3}(f\circ g)'(\frac{1}{2}))$$

$$\int_{a_0}^{a_0+h} f(t)dt \simeq h(f(a_0) + \frac{h}{6}f'(a_0) + \frac{h}{3}f'(a_0+\frac{h}{2}))$$

On a aussi l'erreur :

$$|E_{a_0,h}(f)| = |\int_{a_0}^{a_0+h} f(t)dt - h(f(a_0) + \frac{h}{6}f'(a_0) + \frac{h}{3}f'(a_0+\frac{h}{2}))|$$

$$|E_{a_0,h}(f)| = |h\int_0^1 (f\circ g)(x))dx - h((f\circ g)(0) + \frac{1}{6}(f\circ g)'(0) + \frac{1}{3}(f\circ g)'(\frac{1}{2}))|$$

$$|E_{a_0,h}(f)| = h|\int_0^1 (f\circ g)(x))dx - ((f\circ g)(0) + \frac{1}{6}(f\circ g)'(0) + \frac{1}{3}(f\circ g)'(\frac{1}{2}))|$$

$$|E_{a_0,h}(f)| \leq h\frac{1}{720}||(f\circ g)^{(4)}||_\infty = \frac{h}{720}||h^4 f^{(4)}||_\infty = \frac{h^5}{720}||f^{(4)}||_\infty$$

On pose $h_i = x_{i+1} - x_i$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_i+h_i} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} h_i(f(x_i) + \frac{h_i}{6}f'(x_i) + \frac{h_i}{3}f'(x_i+\frac{h_i}{2}))$$

En appliquant la relation de Chasles, on a alors l'erreur associée

$$|E_{a,b-a}(f)| \leq \sum_{i=0}^{n-1}|E_{x_i,h_i}(f)| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h_i^5}{720}||f^{(4)}||_\infty = \frac{||f^{(4)}||_\infty}{720}\sum_{i=0}^{n-1} h_i^5$$

Dans le cas où on a une subdivision régulière, on a $h_i = \frac{b-a}{n}$ donc

$$|E_{a,b-a}(f)| \leq \frac{||f^{(4)}||_\infty}{720}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{b-a}{n})^5 = \frac{||f^{(4)}||_\infty}{720}n * (\frac{b-a}{n})^5 = \frac{(b-a)^5||f^{(4)}||_\infty}{720n^4}$$