Ecole Centrale de Paris
Course : Optimisation numérique et Applications (Electif 9).
Année : 2011-2012
T. Z. Boulmezaoud et L. Dumas

TD 1

Exercice 1 – On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 12xy.$$

Soit Ω l'ouvert $\mathbb{R}^2$ défini par $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0,\ y > 0,\ xy > 1\}$.

1. Montrer que f est strictement convexe sur Ω.
2. Trouver tous les extréma de f sur Ω (en précisant leur nature).
3. f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 – On considère le problème d'optimisation

$$\begin{aligned} &\min f(x, y) = x + 2xy + 2y - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ &x + y \leq 1, \\ &x \geq 0,\ y \geq 0. \end{aligned}$$

1. Montrer que ce problème admet une solution (sans la calculer).
2. Ecrire les conditions d'optimalité correspondantes.
3. Trouver cette solution.

Exemple 3– On considère le problème d'optimisation

$$\begin{aligned} &\min f(x, y) = -x,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ &y \leq (1 - x)^3 \\ &x \geq 0,\ y \geq 0. \end{aligned}$$

1. Montrer que ce problème admet une solution (sans la calculer).
2. Trouver cette solution graphiquement.
3. Vérifie-t-elle les conditions d'optimalité avec les multiplicateurs de Lagrange ?

4. Interpréter.

Exercice 4 – Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe. Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, on appelle sous-différentiel de f en $\vec{x}$ l'ensemble

$$\partial f(\vec{x}) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n | \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n,\ f(\vec{y}) - f(\vec{x}) \geq \langle \vec{u}, \vec{y} - \vec{x} \rangle\}.$$

1. Soit $\vec{x}$ un point de $\mathbb{R}^n$ où f est différentiable. Montrer que
$$\partial f(\vec{x}) = \{\nabla f(\vec{x})\}.$$
2. Montrer qu'un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ réalise le minimum de f sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si
$$\vec{0} \in \partial f(\vec{x}).$$
3. On suppose que f est de la forme $f = h + g$ avec h et g deux fonctions convexes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\vec{x}$ un point de $\mathbb{R}^n$ où h est différentiable. Montrer que
$$\partial f(\vec{x}) = \partial h(\vec{x}) + \partial g(\vec{x}).$$
4. Soit g la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$g(x, y) = |x - y|.$$
Calculer $\partial g(a, b)$ en tout point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
5. On se place maintenant dans le cas où la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(y - 1)^2 + |x - y|.$$
Résoudre le problème
$$\min f(x, y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$