Ecole Centrale Paris, Electif 10
Equations différentielles et systèmes dynamiques
L. Dumas, T. Z. Boulmezaoud

CONTRÔLE FINAL, 4 juin 2014

A l'attention des surveillants : première 1h30 : pas de documents autorisés, deuxième 1h30 : documents et ordinateur avec internet autorisé.

Les programmes Scilab ou Matlab doivent être envoyés à l'adresse suivante : `laurent.dumas@uvsq.fr` *à la fin de l'examen avec le sujet ECP2014 et un nom du type* `ECP2014-prenom-nom.sci` .

Exercice 1.

Pour tout entier $k \geq 1$, $\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées réelles d'ordre k, et I_k la matrice identité d'ordre k. La transposée d'une matrice quelconque N sera notée N^T. On identifiera l'espace des vecteurs colonnes de taille k à $\mathbb{R}^k$.

Dans la suite, n désigne un entier naturel non nul. Soit C une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que C est continue, T-périodique (c'est-à-dire $C(t+T) = C(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$), où $T > 0$ est un réel fixé. On suppose aussi que $C(t)$ est symétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que

$$\forall t, s \in \mathbb{R},\ C(s)C(t) = C(t)C(s).$$

On pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} I_n & C(t) \\ -C(t) & I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}.$$

On considère le système différentiel linéaire

$$X'(t) = A(t)X(t),\ t \in \mathbb{R},\ X(0) = X_0 \ (X_0 \text{ est donné}) \qquad (1)$$

où l'inconnue X est une application de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$. On note $R(.,.)$ la résolvante du système (1) et on rappelle que pour tous $t, t_0 \in \mathbb{R}$, $R(t, t_0)$ est une matrice de $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et que

$$\frac{d}{dt}R(t, t_0) = A(t)R(t, t_0),\ R(t_0, t_0) = I_{2n}.$$

Par simplicité, on écrira dans la suite $R(t)$ au lieu de $R(t,0)$, pour $t \in \mathbb{R}$. On posera aussi

$$M = R(T), A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T A(s)ds, \quad P(t) = R(t)e^{-tA_0} \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

I. Propriétés de A, R et P

1. Montrer que pour tous $t, s \in \mathbb{R}$, on a
$$A(s)A(t) = A(t)A(s).$$
2. En déduire une expression de $R(t)$, $t \in \mathbb{R}$, en fonction de A.
3. En déduire que
$$M = e^{TA_0}, \; P(t) = e^{\left(\int_0^t (A(s) - A_0)ds\right)} \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$
4. Montrer que $R(t+T) = R(t)M$, pour $t \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que la matrice $A(t) - A_0$ est antisymétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$.
6. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t)$ est orthogonale (c'est-à-dire $P(t)P(t)^T = I_{2n}$). En déduire aussi que pour tout vecteur colonne $Z \in \mathbb{R}^{2n}$, $\|P(t)Z\| = \|Z\|$, où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne définie par $\|Z\| = \sqrt{Z^T Z}$.
7. Calculer $P'(t)$.

II. Transformation du système. Stabilité asymptotique

1. Exprimer $X(T)$ en fonction de M et X_0 et en déduire une condition nécessaire sur M et X_0 pour que X soit non identiquement nulle et T-périodique.
2. On pose $Y(t) = P(t)^{-1}X(t)$. Montrer que
$$Y'(t) = A_0 Y(t), \; t \in \mathbb{R}.$$
Indication : On peut remplacer $X(t)$ par $P(t)Y(t)$ dans l'équation
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que
$$\lim_{t \to +\infty} \|X(t)\| = 0,$$
quelle que soit la donnée initiale X_0.

Exercice 2.

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) \in \mathbb{R}^m \text{ fixé.} \end{cases} \tag{2}$$

L'existence et l'unicité de $y \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^m)$ vérifiant (2) sont bien assurées en supposant par exemple que la fonction f est continûment différentiable de $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ et est globalemement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté L pour la norme choisie sur $\mathbb{R}^m$:

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T], \quad \forall (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^m)^2, \quad ||f(t, y_2) - f(t, y_1)|| \leq L||y_2 - y_1||$$

1. Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $\Delta T = \frac{T}{N}$. Montrer, en utilisant un théorème de point fixe rappelé clairement, que si $\Delta TL < 1$ la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ suivante :

$$\begin{cases} y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé,} \\ y_{n+1} = y_n + \Delta T f(t_0 + (n+1)\Delta T, y_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N - 1. \end{cases}$$

   est bien définie (on parle de la méthode d'Euler implicite).

2. On note $t_n = t_0 + n\Delta T$ et $e_n = y_n - y(t_n)$. Montrer que

$$||e_{n+1}|| \leq (1 + \Delta T L_1)(||e_n|| + ||\epsilon_n||)$$

   où $L_1 = \frac{L}{1 - L\Delta T}$ et ϵ_n désigne l'erreur de consistance :

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

3. En déduire

$$||e_n|| \leq e^{L_1 n \Delta T}||e_0|| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L_1(n-1-i)\Delta T}(1 + \Delta T L_1)||\varepsilon_i||$$

   puis la convergence de la méthode d'Euler implicite :

$$\lim_{N \to +\infty, y_0 \to y(t_0)} (\max_{0 \leq n \leq N} ||e_n||) = 0$$

   (pour simplifier, on pourra supposer que f est C^1 et en déduire une majoration de $||\epsilon_n||$ en $O(\Delta T)^2$).

Exercice 3.

On considère le système de réactions chimiques suivant :
(i) $2A \to A + B$ avec une constante de réaction k_1
(ii) $A + B \to 2A$ avec une constante de réaction r
(iii) $B \to C$ avec une constante de réaction k_2
où A, B et C sont trois espèces chimiques différentes (plus précisément, B représente l'espèce A "activée" préalablement en sa dissociation en l'espèce C)

1. On suppose que les trois espèces ont pour concentrations initiales respectives $A_0 \geq 0$, $B_0 \geq 0$ et $C_0 = 0$; en notant $A(t)$ et $B(t)$ les concentrations respectives à l'instant t de A et B, dététerminer un système de deux équations différentielles régissant $A(t)$ et $B(t)$. On rappelle la relation cinétique générale pour une réaction du type $\alpha M + \beta N \to P + Q$ de constante k : $P'(t) = kM(t)^\alpha.N(t)^\beta$. Par exemple, pour la seule première équation du présent système, on peut écrire : $A't) = -kA^2(t)$.
2. Résoudre numériquement avec Scilab le système d'équations différentielles précédent,

   - tout d'abord avec l'instruction `ode` de Scilab,

   - ensuite avec la méthode d'Euler implicite présentée à l'exercice 2

   et comparer les résultats obtenus graphiquement.

   On pourra prendre les valeurs suivantes : $(A_0, B_0) = (1, 0)$, $(k_1, r, k_2) = (0.2, 0.1, 0.001)$ et rechercher les solutions approchées sur l'intervalle de temps $[0, 300]$.
3. Déterminer les points d'équilibre du système précédent et étudier leur stabilité (théoriquement ou numériquement).