TD 1

Exercice 1. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = a(t)x(t)^2, \quad x(0) = x_0,$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ est donné, et $a(\cdot)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, donnée aussi, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t) > 0.$$

1. On suppose ici que $x_0 > 0$ et que $a(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz précisé à cette équation.
- (b) Résoudre l'équation.

2. On revient maintenant au cas général et on suppose que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)dt < +\infty.$$

Montrer que si $|x_0|$ est suffisamment petit, l'équation ci-dessus admet une solution globale.

Exercice 2.

1. Montrer sans calcul que l'équation

$$x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|}, \quad x(0) = x_0,$$

où $x_0 \geq 0$ est donné, admet au moins une solution.

2. Peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à cette équation ? discuter.

Exercice 3. Montrer l'existence de solutions globales sur $\mathbb{R}$ des équations

$$x'(t) = \frac{1 + \cos(x(t))}{2 + \cos(x(t))}, \quad x(0) = x_0.$$

$$x'(t) = \sin(x(t))x(t) + \frac{x^3(t)}{x^2(t) + 1}e^{t^2}, \quad x(0) = x_0.$$

$$x'(t) = x(t) \log(1 + x^2(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$