Ecole Centrale Paris
Equations différentielles et systèmes Dynamiques
(Electif 10)
Tahar Z. Boulmezaoud
(tahar.boulmezaoud@uvsq.fr)
Année 2014–2015

TD 2

Exercice 1. On considère un système différentiel linéaire de la forme

$$Y'(t) = AY(t) + B(t),$$

où A est une matrice carrée réelle de taille $n \times n$ constante et $B\ :\ t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle continue.
On note p_A le polynôme caractéristique de A et on l'écrit sous la forme

$$p_A(X) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

On a ainsi $a_n = 1 > 0$.
1. On suppose que $n = 2$. Montrer que le système est asymptotiquement stable si et seulement si

$$a_0 > 0, a_1 > 0.$$

2. On se place dans le cas $n = 3$. Montrer que le système est asymptotiquement stable si et seulement si

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0 \text{ et } a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Exercice 2. On considère le système linéaire non-autonome

$$Y'(t) = A(t)Y(t),$$

avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \alpha \cos^2 t & 1 - \alpha \cos t \sin t \\ -1 - \alpha \cos t \sin t & -1 + \alpha \sin^2 t \end{pmatrix},$$

où α désigne un paramètre réel tel que $1 < \alpha < 2$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont indépendantes de t et montrer que leurs parties réelles sont strictement négatives.

2. Montrer qu'il existe des solutions de ce système sous chacune des deux formes

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} e^{\beta t},\ Y_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{\gamma t},$$

où β et γ sont des constantes à déterminer.
3. Que peut-on dire concernant la stabilité de ce système. Conclure.
4. Trouver sa résolvante.

Exercice 3. On considère le système

$$Y'(t) = A(t)Y(t),$$

avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A(t)A(s) - A(s)A(t)$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}$.
2. Calculer l'exponentielle de la matrice

$$K(t) = \int_0^t A(s)ds,$$

et montrer qu'elle n'est pas solution de

$$M'(t) = A(t)M(t),\ M(0) = I.$$

3. Trouver la résolvante de ce système.

Exercice 4. Soit Y la solution du système linéaire

$$Y'(t) = A(t)Y(t),\ Y(0) = Y_0,$$

avec $A\ :\ \mathbb{R} \mapsto \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ continue et T-péridioque, où $T > 0$. On pose

$$M = R(T, 0),$$

où $R(.,.)$ est la résolvante du système.
1. Montrer que $Y(nT) = M^n Y(0)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $Y(nT) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
3. Examiner le cas où A est la matrice de l'exercice 2.

Received

Author information

, , .
Email: