Ecole Centrale Paris, Electif 10
Equations différentielles et systèmes dynamiques
L. Dumas, T. Z. Boulmezaoud

CONTRÔLE FINAL, 09 juin 2015

A l'attention des surveillants : documents autorisés durant toute l'épreuve ; première 1h30 : pas d'ordinateur autorisé, deuxième 1h30 : ordinateur (avec internet) autorisé.

Les programmes Scilab ou Matlab doivent être envoyés à l'adresse suivante : `laurent.dumas@uvsq.fr` *à la fin de l'examen avec le sujet ECP2015 et un nom du type* `ECP2015-prenom-nom.sci` .

Exercice 1.

Dans tout l'exercice f désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- $f(1) = 0$,
- $x \in]0,1] \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est strictement croissante.

Ainsi, $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1]$. On pose dans la suite $\alpha_0 = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$, et on a par l'inégalité des accroissements finis

$$\forall x, y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq \alpha_0 |x - y|.$$

Soit $\ell > 0$ un réel, $I = [0, \ell]$ et considérons l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} -u''(t) + f(u(t)) = 0 \text{ pour } t \in I, \\ \text{et } 0 \leq u(t) \leq 1 \text{ pour } t \in I, \end{aligned} \tag{1}$$

complétée avec les conditions aux limites

$$u(0) = 0 \text{ et } u(\ell) = 1. \tag{2}$$

On rappelle que $H^1(I)$ désigne l'espace des fonctions définies sur $[0,\ell]$ (au sens généralisé) vérifiant

$$\int_0^\ell v(t)^2 dt < +\infty,\ \int_0^\ell v'(t)^2 dt < +\infty.$$

On rappelle aussi que $H_0^1(I)$ désigne l'espace des fonctions de $H^1(I)$ vérifiant $v(0) = v(\ell) = 0$.

1. Soit u solution de (1) et (2). Montrer que u est concave (c'est à dire $-u$ est convexe) et que $u(t) > 0$ pour tout $t \in]0, \ell[$.
2. Soit $\alpha > 0$ un réel et g une fonction continue sur I. Soit l'équation :
$$-y''(t) + \alpha y(t) = g(t) \text{ pour } t \in I,\ y(0) = 0,\ y(\ell) = 1. \tag{3}$$
On pose
$$v(t) = y(t) - \frac{t}{\ell},\ t \in I. \tag{4}$$
Montrer que si y est solution de classe $\mathscr{C}^2$ de (3) alors
   (a) $y \in H^1(I)$ et $v \in H_0^1(I)$.
   (b) v est solution dans $H_0^1(I)$ du problème variationnel :
$$\forall w \in H_0^1(I),\ \int_0^\ell v'(t)w'(t)dt + \alpha \int_0^\ell v(t)w(t)dt = \int_0^\ell \tilde{g}(t)w(t)dt, \tag{5}$$
   où on exprimera $\tilde{g}(t)$ en fonction de $g(t)$, t, ℓ et α.
   On admettra dans la suite la réciproque suivante : si v est solution dans $H_0^1(I)$ du problème variationnel (5), alors y, défini par (4), est solution de classe $\mathscr{C}^2$ de (3).
   (c) En appliquant convenablement le théorème de Lax-Milgram, montrer que le problème (5) admet une et une solution $v \in H_0^1(I)$. On en déduit donc que (3) admet une unique solution y de classe $\mathscr{C}^2$ sur I (cette dernière affirmation n'est pas une question).
   (d) Soit θ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I telle que
$$-\theta''(t) + \alpha\theta(t) \geq 0 \text{ pour } t \in I,\ \theta(0) \geq 0,\ \theta(\ell) \geq 0.$$
   Montrer que $\theta(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$ (indication : on peut considérer le point t_0 réalisant le minimum de θ sur I).
3. On suppose maintenant que $\alpha > \alpha_0$. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence comme suit
   – $u_0(t) = 1$ pour tout $t \in I$.
   – Pour tout $n \geq 0$, u_{n+1} est l'unique solution de classe $\mathscr{C}^2$ du problème
$$-u''_{n+1}(t) + \alpha u_{n+1}(t) = \alpha u_n(t) - f(u_n(t)), \quad \text{pour } t \in I,$$
$$u_{n+1}(0) = 0,\ u_{n+1}(\ell) = 1.$$
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$:

(a1) $0 \le u_n \le 1$ (c'est-à-dire $0 \le u_n(t) \le 1$ pour tout $t \in I$) et la suite (u_n) est bien définie (pour montrer que $u_n \le 1$ on peut poser $z_n = 1 - u_n$ et raisonner sur z_n).

(a2) $u_{n+1} \le u_n$.

(b) Montrer que $(u_n)_{n\ge 0}$ converge simplement vers une limite u.

(c) Que peut-on conjecturer à propos de u et de l'équation (1) ?

4. Soit u_1 et u_2 deux solutions de (1), de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifiant (2). On suppose qu'il existe $t_1 \in]0, \ell[$ tel que $u_1(t_1) \ne u_2(t_1)$. On convient par exemple que $u_1(t_1) < u_2(t_1)$.

   (a) Montrer qu'il existe un intervalle $[a, b] \subset [0, \ell]$ tel que
   $$u_1(a) = u_2(a),\ u_1(b) = u_2(b) \text{ et } u_1(t) < u_2(t) \text{ pour tout } t \in]a, b[.$$

   (b) Montrer que $u_1'(a) \le u_2'(a)$ et $u_1'(b) \ge u_2'(b)$.

   (c) Montrer la relation
   $$\int_a^b \left(\frac{f(u_2(t))}{u_2(t)} - \frac{f(u_1(t))}{u_1(t)}\right)u_1(t)u_2(t)dt$$
   $$= u_1(a)(u_1'(a) - u_2'(a)) + u_1(b)(u_2'(b) - u_1'(b)).$$

   (d) En déduire une contradiction et conclure.

5. On suppose de plus dans cette question que $f' \ge 0$. On pose
   $$F(x) = 2\int_0^x f(s)ds,\ 0 \le x \le 1.$$
   Montrer que toute solution de (1) et (2) réalise un minimum de la fonctionnelle
   $$J(w) = \int_0^\ell (w'(t)^2 + F(w(t)))dt,$$
   sur l'ensemble de toutes les fonctions w de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \ell]$ vérifiant $0 \le w \le 1$ et (2) (on peut observer que F est convexe).

Exercice 2.

On considère le système d'équations différentielles d'inconnues $t \mapsto (x(t), y(t))$ et de paramètres $a > 0$ et $b > 0$ suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - (b+1)x(t) + ax^2(t)y(t) \\ y'(t) = bx(t) - ax(t)^2y(t) \end{cases} \tag{6}$$

traduisant un système de réactions chimiques faisant intervenir les espèces X, Y, A et B de concentrations respectives $x(t)$, $y(t)$, a et b (ces deux dernières sont donc des constantes indépendantes du temps).

1. Justifier l'existence d'une solution locale au système (6) pour une donnée initiale quelconque $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_+$.
2. Déterminer l'unique point d'équilibre du système (6) ainsi que sa stabilité linéaire en fonction des paramètres a et b.
3. On suppose que $a = 1$. Utiliser Scilab et l'instruction `ode` pour illustrer graphiquement un cas avec un point d'équilibre stable (pour le système linéarisé) et un autre cas avec un point d'équilibre instable correspondant à deux valeurs de b différentes.
4. On suppose à présent que $a = 1$ et $b = 2.5$. Représenter graphiquement avec Scilab (ou sur votre feuille) une région du quart de plan $\mathbb{R}^2_+$, contenant le point d'équilibre, où toutes les trajectoires $t \mapsto (x(t), y(t))$ partant de l'intérieur de cette région restent pour tout $t > 0$ dans cette région. Vérifier que dans ce cas, les trajectoires se rapprochent d'un cycle limite qu'on tracera avec Scilab.
5. Implémenter la méthode de Runge Kutta d'ordre 2 suivante :

$$Z_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2} \left(f(t_n, Z_n) + f(t_{n+1}, Z_n + \Delta t f(t_n, Z_n)) \right)$$

   pour le système (6) avec $(a, b) = (1, 2.5)$ et $(x_0, y_0) = (0.5, 1)$ sur l'intervalle de temps $[0, 100]$. Comparer graphiquement, pour différents pas de temps, le résultat obtenu avec celui utilisant l'instruction `ode`.