Ecole Centrale Paris
Equations différentielles et systèmes Dynamiques
(Electif 10)
Tahar Z. Boulmezaoud
(tahar.boulmezaoud@uvsq.fr)
Année 2014–2015

PROJET (à rendre impérativement avant le Jeudi 28 Mai 2015)

Le présent projet comporte une partie théorique et une partie numérique. La partie III est facultative. Chaque binôme est invité à rendre un **compte rendu** comportant :

1. Une réponse aux questions posées (document PDF tapé ou scanné).
2. Un listing du programme source commenté (de préférence en un seul fichier).
3. Une synthèse des résultats numériques obtenus.

Ce compte rendu est à envoyer exclusivement par mail à l'adresse :
tahar.boulmezaoud@uvsq.fr.
Une démonstration et une exécution des programmes devant ordinateur est à prévoir pour la séance du 28 mai 2015.
Le langage de programmation à utiliser est laissé à la liberté de l'étudiant. Néanmoins, il est préférable d'utiliser celui de Scilab ou de Matlab.

Il est fortement recommandé de respecter **la concision** et **la clarté** dans la rédaction du compte rendu et dans la programmation.

ENONCÉ

On considère sur l'intervalle $[-1, 1]$ l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = f, \;\; u(-1) = a, \; u(1) = b, \tag{0.1}$$

où λ, a et b sont des constantes réelles et f une fonction continue sur $[a, b]$.
L'équation (0.1) est volontairement choisie simple. On sait que sa solution s'exprime comme somme d'une solution de l'équation homogène associée et d'une intégrale dépendant de f. Le but ici est plutôt d'utiliser cette équation comme support pour introduire et implanter deux méthodes numériques. Ces deux méthodes peuvent être néanmoins employées pour résoudre des équations différentielles (ou aux dérivées partielles) bien plus complexes.

Dans toute la suite, la solution du problème (0.1) quand elle existe, est supposée de classe $\mathscr{C}^2$.

PARTIE I. Étude théorique

1. On suppose dans cette question (uniquement) que $f = 0$ et $a = b = 0$. Montrer alors que le système (0.1) n'admet aucune solution non nulle sauf si λ appartient à un ensemble dénombrable $\{\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_k, ...\}$ qu'on précisera. Trouver la solution non triviale de (0.1) quand $\lambda = \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit u une solution de (0.1). On pose $v(x) = u(x) - \dfrac{b-a}{2}(x+1) - a$. On a ainsi $v(-1) = v(1) = 0$. Montrer que pour toute fonction φ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$, on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{dv}{dx}(x)\frac{d\varphi}{dx}(x)dx - \lambda \int_{-1}^{1} v(x)\varphi(x)dx = \int_{-1}^{1} \hat{f}(x)\varphi(x)dx, \tag{0.2}$$

où $\hat{f}$ est une fonction qu'on exprimera en fonction de f, a, b et λ. En déduire que si $\lambda \leq 0$, alors la solution u est unique.

PARTIE II. Polynômes de Legendre. Approximation spectrale

On cherche maintenant à approcher la solution u par une fonction u_N de type polynôme de degré inférieur ou égal à $N \geq 1$. Soit $\mathbb{P}_N^0$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur où égal à N qui s'annulent en -1 et 1. $\mathbb{P}_N^0$ est donc un espace vectoriel de dimension $N-1$. On note en outre par $\mathbb{P}_N^+$ (resp. $\mathbb{P}_N^-$) le sous-espace des polynômes de $\mathbb{P}_N^0$ pairs (resp. impairs). On a l'identité évidente $\mathbb{P}_N^0 = \mathbb{P}_N^+ \oplus \mathbb{P}_N^-$.
On suppose dans toute la suite que N est pair et on pose $N = 2m$ avec $m \geq 1$.
On pose $u_N(x) = v_N(x) + \dfrac{b-a}{2}(x+1) + a$, où v_N appartient à $\mathbb{P}_N^0$ et vérifie

$$\int_{-1}^{1} \frac{dv_N}{dx}(x)\frac{dP}{dx}(x)dx - \lambda \int_{-1}^{1} v_N(x)P(x)dx = \int_{-1}^{1} \hat{f}(x)P(x)dx, \quad \forall P \in \mathbb{P}_N^0, \tag{0.3}$$

(ce problème approché est formulé sous cette façon dans $\mathbb{P}_N^0$ par analogie avec la formulation (0.2) du problème continue).
1. On décompose v_N sous la forme $v_N = v_N^+ + v_N^-$ où $v_N^+ \in \mathbb{P}_N^+$ et $v_N^- \in \mathbb{P}_N^-$. Montrer que v_N^+ et v_N^- sont solutions de deux problèmes séparés, l'un dans $\mathbb{P}_N^+$ et l'autre dans $\mathbb{P}_N^-$.

On considère maintenant la famille des polynômes de Legendre L_k, $k \in \mathbb{N}$, définis par la formule de Rodrigues :

$$L_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k,\ \forall k \geq 1,$$

et $L_0(x) = 1$. Ces polynômes vérifient la relation de recurrence

$$kL_k(x) = (2k-1)xL_{k-1}(x) - (k-1)L_{k-2}(x) \ \ \forall k \geq 2,$$

En outre, ils ont les propriétés suivantes :

- L_k est de degré k pour tout k et a la même parité que k (c'est-à-dire $L_k(-x) = (-1)^k L_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
- On a la relation d'orthogonalité :

$$\int_{-1}^{1} L_k(x)L_m(x)dx = \frac{2}{2k+1}\delta_{k,m}, \ \forall k, m \geq 0. \tag{0.4}$$

En conséquence, pour tout $k \geq 1$, L_k est toujours orthogonal à tous les polynômes de degré inférieur où égal à $k-1$.

2. PROGRAMMATION – Écrire une fonction recursive **Legendre()** qui renvoie la valeur de $L_k(x)$ pour k et x données.
3. On introduit maintenant en plus la famille des polynômes

$$\ell_k(x) = \alpha_k(1-x^2)L_k'(x), \ \text{ avec } \alpha_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2k+1}}{k(k+1)}, \ \forall k \geq 1$$

PROGRAMMATION – En utilisant la relation (qu'on admet)

$$(1-x^2)L_k'(x) = -kxL_k(x) + kL_{k-1}(x),$$

écrire une fonction **Polbase()** qui renvoie la valeur de $\ell_k(x)$ pour $k \geq 1$ et x données.
Écrire une fonction **Interpol()** qui ayant comme paramètres, deux entiers k et s, un vecteur V de taille k, un vecteur X de taille s, renvoie un vecteur Y de taille s contenant les valeurs interpolées

$$Y_j = \sum_{i=1}^{k} V_i \ell_i(X_j), \ j = 1, ...s.$$

4. Montrer que pour tout $k \geq 0$, $\ell_{2k+1}(x)$ est un polynôme pair et que ℓ_{2k} est un polynôme impair et en déduire que $\ell_1, \ell_3, ..., \ell_{2m-1}$ forment une base de $\mathbb{P}_N^+$ et que $\ell_2, \ell_4, ..., \ell_{2m-2}$ forment une base de $\mathbb{P}_N^-$.
5. On note par V^+ et V^- les vecteurs des composantes de v_N^+ et v_N^- dans ces deux bases respectivement. Montrer que V^+ et V^- sont solutions de deux systèmes linéaires de la forme :

$$(I - \omega A^+)V^+ = B^+, \ \ (I - \omega A^-)V^- = B^-, \tag{0.5}$$

où A^+ et A^- sont deux matrices tridiagonales symétriques indépendantes de λ et dont on donnera explicitement les coefficients, ω est une constante qu'on exprimera en fonction de λ, tandis que B^+ et B^- sont deux vecteurs dépendant de $\hat{f}$ dont exprimera les coefficients sous forme

d'intégrales (sans calculer ces intégrales).
Indication : on utilise les relations suivantes (admises) :

$$\int_{-1}^{1} \ell_k'(x)\ell_j'(x)dx = \delta_{k,j}, \tag{0.6}$$

$$\int_{-1}^{1} \ell_k(x)\ell_j(x)dx = 0 \text{ si } |k-j| > 2, \forall k, j \geq 1, \tag{0.7}$$

$$\int_{-1}^{1} \ell_k(x)^2 dx = \frac{2}{(2k-1)(2k+3)}, \quad \forall k \geq 1, \tag{0.8}$$

$$\int_{-1}^{1} \ell_k(x)\ell_{k-2}(x)dx = -2\alpha_k\alpha_{k-2}\frac{(k-2)(k-1)k(k+1)}{(2k-1)(2k+1)(2k-3)}, \quad \forall k \geq 3. \tag{0.9}$$

6. Montrer que la matrice A^+ (resp. A^-) admet m (resp. $m-1$) valeurs propres $\mu_1^+, ..., \mu_m^+$ (resp. $\mu_1^-, ..., \mu_{m-1}^-$) toutes strictement positives.
7. Proposer une méthode numérique pour inverser un système linéaire dont la matrice est tridiagonale, symétrique et définie positive quelconque T de taille s donnée.
8. PROGRAMMATION – Écrire une subroutine (ou une fonction) **Systlin()** qui a comme paramètres une matrice tridiagonale symétrique positive quelconque T, sa taille s et un vecteur Y de taille s et qui renvoie à la sortie le vecteur X solution du système linéaire $TX = Y$ (et utilisant la méthode proposée).
9. Vérifier que $u(x) = \dfrac{2}{\sqrt{5-4x}}$ est une solution exacte de (0.1) avec $a = \dfrac{2}{3}$, $b = 2$ et

$$f(x) = \frac{24}{(5-4x)^2\sqrt{5-4x}} + \frac{2\lambda}{\sqrt{5-4x}}.$$

Calculer les composantes des vecteurs B^+ et B^-.
Indication : on utilise (0.4) et les relations suivantes (admises) :

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{\sqrt{5-4x}}(1-x^2)L_k'(x)dx = \frac{k(k+1)}{(2k+1)}\left(\frac{4}{2k-1} - \frac{1}{2k+3}\right)\frac{1}{2^k}, \quad \forall k \geq 1, \tag{0.10}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(5-4x)^2\sqrt{5-4x}}(1-x^2)L_k'(x)dx = \frac{1}{9}\frac{k(k+1)}{2^{k+1}}, \quad \forall k \geq 1. \tag{0.11}$$

Remarque : à titre indicatif, ces formules proviennent de la formule plus générale :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} L_k(x)z^k.$$

10. PROGRAMMATION – Écrire une subroutine **SolPart()** qui renvoie un vecteur $SOLE$ contenant les valeurs de la solution particulière exacte ci-dessus aux points $x_k = -1 + \dfrac{2k}{N}$, $k = 0, 1, 2, ..., N$.

11. PROGRAMMATION – Écrire une subroutine **Spectrale()** ayant comme paramètre un entier m, trois réels λ, a, b, et un tableau SOL de taille $2m+1$ et effectuant les opérations suivantes :

1. Calcule les éléments des deux matrices $I - \lambda A^{+}$ et $I - \lambda A^{-}$.
2. Calcule les deux vecteurs B^{+} et B^{-} correspondant à la fonction $\hat{f}$ indiquée ci-dessus.
3. Inverse les deux systèmes linéaires (0.5).
4. Renvoie (sans afficher) un vecteur SOL contenant les valeurs de la solution approchée $u_N(x)$ aux points $x_k = -1 + \dfrac{2k}{N}$ avec $k = 0, 1, ..., N$.

Remarque : tous les paramètres A^{+}, A^{-}, B^{+}, B^{-}, V^{+}, V^{-} doivent être déclarés en variables locales et non pas en paramètres formels.

5. PROGRAMMATION – Écrire un petit programme (principal) qui affiche les valeurs de la solution exacte ci-dessus, de la solution approchée correspondant à f et de l'erreur relative entre les deux et cela aux points indiquées ci-dessus. On prendra $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

PARTIE III. Approximation par différences finies (cette partie est facultative)

On revient dans cette partie à l'équation originel (0.1) et on considère une subdivision de l'intervalle $[-1, 1]$ en N petits d'intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ avec $x_k = -1 + kh, \forall k \in \{0,\ 1, ..., N\}$ et $h = \dfrac{2}{N}$.

1. On suppose que u est de classe C^4 sur $[-1, 1]$ et on définit pour tout $k \in \{1, ..., N-1\}$ le résidu

$$\epsilon_k = \frac{u(x_{k+1}) + u(x_{k-1}) - 2u(x_k)}{h^2} - u''(x_k)$$

Montrer en utilisant la formule de Taylor-Lagrange avec une fonction appropriée que :

$$|\epsilon_k| \leq \frac{M_4}{12} h^2, \ \ \forall k \in \{1, ..., N-1\},$$

où $M_4 = \sup\limits_{[-1,1]} |u^{(4)}(x)|$.

2. On remplace en conséquence le système (0.1) par le système discret :

$$u_0 = a,\ u_N = b, \tag{0.12}$$

$$\frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{h^2} + \lambda u_k = f_k, \forall k \in \{1, ..., N-1\}, \tag{0.13}$$

où $f_k = f(x_k)$ et $u(x_k)$ est une valeur approchée de $u_k,\ \forall k \in \{0, ..., N\}$.
On pose $U_h = (x_1, ..., x_{N-1})^T$. Montrer que U_h est solution d'un système linéaire de la forme :

$$(A - \lambda h^2 I)U_h = C \tag{0.14}$$

où A est une matrice tridiagonale symétrique indépendente de h, et C un vecteur qu'on exprimera en fonction du vecteur $F_h = (f_1, ..., f_{N-1})^T$, de h et de a et b.

3. PROGRAMMATION – Écrire une subroutine **DiffFinie()** qui, ayant comme paramètre un entier N, trois réels a, b et λ, effectue les opérations suivantes :

1. Calcule les éléments de la matrice A.
2. Inverse le système linéaire (0.14).
3. Renvoie (sans afficher) un vecteur U_h contenant les valeurs approchées $u_0, ..., u_N$ avec $k = 0, 1, ..., N$.

4. PROGRAMMATION – Rajouter au programme principal ci-dessus une partie affichant en plus le vecteur solution U_h et l'erreur relative correspondante aux points x_k. Comparer avec les résultats obtenus par la méthode spectrale et cela pour les mêmes valeurs de N et de λ.

5. En cherchant les couples (α, μ) tels que le vecteur $x_\alpha = (\sin\alpha, \sin(2\alpha), ..., \sin((N-1)\alpha)^T$ soit vecteur propre de A et μ la valeur propre associée, montrer que les valeurs propres de A sont :

$$\mu_k = 4\sin^2\left(k\frac{\pi}{2N}\right). \tag{0.15}$$

6. On introduit les erreurs d'approximation

$$e_k = u(x_k) - u_k, \forall k \in \{0, ..., N\} \text{ (on a ainsi } e_0 = e_N = 0).$$

et on définit l'erreur d'approximation globale :

$$e = \sup_k |e_k|.$$

Montrer que si $\lambda = 0$ alors le vecteur $E = (e_1, ..., e_{N-1})^T$ est solution d'un système linéaire de la forme :

$$AE = h^2\mathcal{E}, \tag{0.16}$$

où on exprimera les composantes du vecteur $\mathcal{E}$ en fonction de $\epsilon_1, ..., \epsilon_{N-1}$ et h. En déduire que :

$$e_l = -\frac{h^2 k}{N}\sum_{l=1}^{N-1}(N-l)\epsilon_l + h^2\sum_{l=1}^{k-1}(k-l)\epsilon_l,\ \forall k \in \{1, ..., N-1\}.$$

Indication : on pourra commencer par faire une addition verticale dans le système linéaire (0.14) pour obtenir une nouvelle relation de recurrence reliant e_k et e_{k+1}.
En déduire une majoration de l'erreur globale e en fonction de N et M_4.

7. Vérifier que les erreurs numériques obtenues avec l'exemple ci-dessus (avec $\lambda = 0$) satisfont cette estimation (on pourra faire une petite subroutine qui calcule l'erreur entre deux vecteurs).

Received

Author information

, , .
Email: