TD/TP Problèmes aux limites

ECP, électif 10, 26 mai 2016

(Etude d'une EDO avec conditions aux limites de Dirichlet)

On étudie ici l'équation différentielle avec conditions aux limites suivante:

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où $c \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}_+)$ et $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$.

a) A l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué au problème de Cauchy paramétré par $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} -u''_\lambda(x) + c(x)u_\lambda(x) = f(x), & x \in]0, 1[\\ u_\lambda(0) = 0 \\ u'_\lambda(0) = \lambda \end{cases}$$

montrer qu'il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbf{R})$ de (1) (méthode de tir).

b) Montrer que si $f \geq 0$, alors $u \geq 0$ (principe du maximum).

c) On cherche à présent à approcher u à l'aide d'une méthode de type différences finies. Dans toute la suite, on note $h = \frac{1}{N+1}$ où $N \in \mathbf{N}$. Montrer tout d'abord que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbf{R})$, il existe $C \geq 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbf{N}, \forall i \in \{1, \dots, N\}, |u''(ih) - \frac{1}{h^2}(u((i+1)h) + u((i-1)h) - 2u(ih))| \leq Ch^2$$

d) On propose pour approcher u le schéma consistant à construire pour tout $N \in \mathbf{N}$ la famille $(u_i)_{0 \leq i \leq N+1}$ vérifiant

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) + c(ih)u_i = f(ih) & (1 \leq i \leq N) \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Montrer que le vecteur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq N}$ est caractérisé par une relation du type $AU = F$ avec $F \in \mathbf{R}^N$ et $A \in SDP_N(\mathbf{R})$ à déterminer.

e) On considère la famille des matrices $B \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ vérifiant les trois propriétés suivantes (M matrices):

$$\begin{cases} B_{i,i} > 0 \\ B_{i,j} \leq 0 & (i \neq j) \\ \sum_{j=1}^N B_{i,j} > 0 & (1 \leq i \leq N) \end{cases}$$

Montrer que $B \in GL_N(\mathbf{R})$ et que si $F \in \mathbf{R}^N$ a des coordonnées toutes positives, il en est de même pour $B^{-1}F$. En déduire que tous les coefficients de B^{-1} sont positifs.

f) En utilisant le fait que pour tout $\epsilon > 0$, $A + \epsilon I$ est une M -matrice, montrer que tous les coefficients de A^{-1} sont positifs (principe du maximum discret)

g) En utilisant le vecteur $V = (v(h), \dots, v(Nh))$ avec $v(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$, montrer que

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{8}$$

h) Montrer la convergence d'ordre 2 du schéma d'approximation (2) de (1) pour des données c et f de classe $\mathcal{C}^2$, à savoir:

$$\exists C \geq 0, \quad \forall N \in \mathbf{N}, \quad \max_{0 \leq i \leq N+1} (|u_i - u(ih)|) \leq Ch^2$$

(Implémentations sous Scilab)

i) Implémenter la méthode de tir présentée en a) à l'aide de l'instruction `ode` et de l'instruction `fsolve`. Comparer avec la solution exacte pour $c(x) = x$ et un second membre bien choisi.

j) Implémenter le schéma (2) avec Scilab. Vérifier dans le même cas que précédemment la vitesse de convergence obtenue à la question h).

k) On modifie les conditions aux limites de (1) en imposant à présent $u(0) = 0$ et $u'(1) = 1$ puis $u'(0) = u'(1) = 0$. Proposer pour ces deux nouvelles situations un schéma du type (2) et l'implémenter avec Scilab.