Ecole Centrale Paris, Electif 10
Equations différentielles et systèmes dynamiques
L. Dumas, T. Z. Boulmezaoud

CONTRÔLE SESSION 1, 9 juin 2016

A l'attention des surveillants : aucun document autorisé.

Exercice 1.
On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= -ay(t) - x(t)^3 - x(t)^5, \end{cases} \tag{1}$$

où $a > 0$ est un paramètre fixé.

1. Ecrire le système linéarisé autour de $(0,0)$ associé à (1).
2. Dessiner le portrait de phase de ce système linéarisé et étudier sa stabilité et sa stabilité asymptotique en $(0,0)$.
3. Montrer que le système (1) est stable en $(0,0)$ (c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|(x(0), y(0))\| < \delta$ alors $\|(x(t), y(t))\| < \epsilon$ pour tout $t \geq 0$).

Exercice 2. Soient $n \geq 1$ un entier. On note $\mathscr{C}_0^1([0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifiant $x(0) = 0$. Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive de classe $\mathscr{C}^2$. On considère le problème de minimisation

$$\min_{z \in \mathscr{C}_0^1([0,+\infty[;\, \mathbb{R}^n)} J(z),$$

avec

$$J(z) = \int_0^{+\infty} (\frac{1}{2}\|z'(t)\|^2 + V(z(t)))dt,$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ (l'intégrale à minimiser peut éventuellement valoir $+\infty$). Dans la suite, x désignera une solution de ce problème de minimisation et on suppose que $J(x) < +\infty$.

1. Justifier brièvement pourquoi x est solution de l'équation

$$x''(t) = \nabla V(x(t)), \ \forall t \geq 0.$$

   On admettra désormais que x est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que la fonction

$$H(t) = \frac{1}{2}\|x'(t)\|^2 - V(x(t)),\ t \geq 0,$$

est constante.

3. On suppose que V est convexe.
   (a) Montrer que la fonction $\phi\ :\ t \in [0, +\infty[\mapsto V(x(t))$ est convexe.
   (b) En déduire que ϕ est décroissante.
   (c) Montrer que $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0$.
   (d) Montrer que $H(0) = 0$.

Exercice 3
Soit le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\begin{cases} x' = 2(x - ty) \\ y' = 2y \end{cases}$$

1. Déterminer la courbe intégrale qui passe par le point (x_0, y_0) au temps $t = 0$.
2. Le problème est-il bien posé mathématiquement ? Numériquement ?
3. On utilise la méthode d'Euler explicite avec pas constant h, démarrant au temps $t_0 = 0$. Soit (x_n, y_n) le point atteint au temps $t_n = nh$ $(n \in \mathbb{N})$
   (a) Ecrire la relation qui lie (x_{n+1}, y_{n+1}) à (x_n, y_n).
   (b) Calculer explicitement (x_n, y_n) en fonction de n, h, x_0, y_0. On pourra utiliser la suite auxiliaire $z_n = \dfrac{x_n}{(1 + 2h)^n}$.
   (c) Sans utiliser les théorèmes généraux du cours, vérifier que la solution approchée qui interpole linéairement les points (x_n, y_n) converge sur $\mathbb{R}_+$ vers la solution exacte du système.
4. Proposer un script Scilab permettant de comparer la solution exacte et la solution approchée précédente dans le cas où $x_0 = y_0 = 1$.

Exercice 4 On verse une masse m_s de sucre dans un récipient contenant initialement une quantité d'eau pure pouvant dissoudre au maximum une masse M ; la vitesse de dissolution (masse dissoute par unité de temps), à un instant donné, est proportionnelle à la différence entre M et la masse déjà dissoute à cet instant, indépendament de la masse restante.

1. Traduire cette loi par une EDO sur la fonction $t \to m(t)$ (masse de sucre dissoute à l'instant t) et donner la forme de la solution faisant apparaitre une constante de temps τ.
2. Suivant la valeur de m_s, quand la dissolution s'arrête t-elle ?
3. Au bout de 10 minutes, il reste 40 pour cent de la masse initiale et au bout de 20 minutes, 10 pour cent. En déduire $\frac{m_s}{M}$, τ et le temps correspondant à la dissolution complète.
4. On suppose $\frac{m_s}{M} = \frac{(e-1)}{e}$ et $\tau = 1$. On cherche à approcher $m(\frac{n}{N})$ ($n \in \{0, ..., N\}$ et $N \in \mathbb{N}^*$) par la méthode d'Euler explicite sur $[0, 1]$. Exprimer les valeurs $(m_n)_{0 \le n \le N}$ ainsi construites et retrouver la convergence de la méthode d'Euler explicite sur cet exemple.
5. Le problème est-il bien conditionné pour la méthode précédente ?