Ecole Centrale Paris
Electif 10 MA2620
Equations différentielles et systèmes dynamiques.

Travaux dirigés
Année universitaire 20016-2017

TD n°1 : Systèmes d'équations différentielles : approximation numérique des solutions.

Exercice 1
On considère l'équation différentielle du second ordre avec conditions initiales

$$(E) \qquad y''(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in [0,T], \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

où $f \in \mathrm{C}^2([0,T] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$. On discrétise l'équation par le schéma

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 f(t_n, y_n), \qquad n \geq 1$$

où $t_n = nh$, $h = T/N$. Majorer l'erreur de consistance

$$\eta(y,h) = \sup_{h \leq t \leq T-h} |f(t,y) - \frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2}|.$$

Exercice 2
Soit le problème de Cauchy $y' = f(t,y), y(0) = y_0$, avec $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ globalement Lipschitzienne par rapport à y, uniformément en t. Etudier la consistance et la stabilité de la méthode de Heun

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{1}{2}f(t_n, y_n) + \frac{1}{2}f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)\right], \quad \text{où} \quad t_n = nh, h = T/N.$$

Exercice 3
On considère le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1'(t) + 2u_1(t) - u_2(t) + u_1(t)e^{u_1(t)} & = & 0 \\ u_2'(t) - u_1(t) + 2u_2(t) + u_2(t)e^{u_2(t)} & = & 0 \end{array} \right. \qquad t > 0,$$

avec la condition initiale $u_1(0) = u_2(0) = 1$. Dans la suite, on pose $u(t) = \binom{u_1(t)}{u_2(t)}$.

1. Démontrer que si $u(t)$ est solution du problème alors la fonction g définie par $g(t) = \|u(t)\|^2$ est décroissante.
2. Si $h > 0$ est le pas de temps et si $t_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, écrire le schéma d'Euler implicite qui permettra de calculer les approximations u^n de $u(t_n)$ pour $n = 0, 1, 2 \ldots$.
3. Démontrer que si u^n est solution du schéma d'Euler implicite, alors la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n = \|u^n\|^2$ est décroissante.
4. Expliciter la méthode de Newton qui permettra de calculer u^{n+1} à partir de u^n. Effectuer un pas de cette méthode pour calculer u^1 à partir de u^0.

Exercice 4 (examen 2016)
Soit le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 2(x - ty) \\ y' = 2y \end{array} \right.$$

1. Déterminer la courbe intégrale qui passe par le point (x_0, y_0) au temps $t = 0$.
2. Le problème est-il bien posé mathématiquement ? Numériquement ?
3. On utilise la méthode d'Euler explicite avec pas constant h, démarrant au temps $t_0 = 0$. Soit (x_n, y_n) le point atteint au temps $t_n = nh$ $(n \in \mathbb{N})$
   (a) Ecrire la relation qui lie (x_{n+1}, y_{n+1}) à (x_n, y_n).
   (b) Calculer explicitement (x_n, y_n) en fonction de n, h, x_0, y_0. On pourra utiliser la suite auxiliaire $z_n = \dfrac{x_n}{(1+2h)^n}$.
   (c) Sans utiliser les théorèmes généraux du cours, vérifier que la solution approchée qui interpole linéairement les points (x_n, y_n) converge sur $\mathbb{R}_+$ vers la solution exacte du système.
4. Proposer un script Scilab permettant de comparer la solution exacte et la solution approchée précédente dans le cas où $x_0 = y_0 = 1$.

Exercice 5 (examen 2016)
On verse une masse m_s de sucre dans un récipient contenant initialement une quantité d'eau pure pouvant dissoudre au maximum une masse M ; la vitesse de dissolution (masse dissoute par unité de temps), à un instant donné, est proportionnelle à la différence entre M et la masse déjà dissoute à cet instant, indépendamment de la masse restante.

1. Traduire cette loi par une EDO sur la fonction $t \to m(t)$ (masse de sucre dissoute à l'instant t) et donner la forme de la solution faisant apparaitre une constante de temps τ.
2. Suivant la valeur de m_s, quand la dissolution s'arrête t-elle ?
3. Au bout de 10 minutes, il reste 40 pour cent de la masse initiale et au bout de 20 minutes, 10 pour cent. En déduire $\frac{m_s}{M}$, τ et le temps correspondant à la dissolution complète.
4. On suppose $\frac{m_s}{M} = \frac{(e-1)}{e}$ et $\tau = 1$. On cherche à approcher $m(\frac{n}{N})$ $(n \in \{0, ..., N\}$ et $N \in \mathbb{N}^*)$ par la méthode d'Euler explicite sur $[0, 1]$. Exprimer les valeurs $(m_n)_{0 \leq n \leq N}$ ainsi construites et retrouver la convergence de la méthode d'Euler explicite sur cet exemple.
5. Le problème est-il bien conditionné pour la méthode précédente ?

Exercice 6. (examen 2015)
On considère le système d'équations différentielles d'inconnues $t \mapsto (x(t), y(t))$ et de paramètres $a > 0$ et $b > 0$ suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - (b+1)x(t) + ax^2(t)y(t) \\ y'(t) = bx(t) - ax(t)^2 y(t) \end{cases} \tag{6}$$

traduisant un système de réactions chimiques faisant intervenir les espèces X, Y, A et B de concentrations respectives $x(t)$, $y(t)$, a et b (ces deux dernières sont donc des constantes indépendantes du temps).

1. Justifier l'existence d'une solution locale au système (6) pour une donnée initiale quelconque $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$.
2. Déterminer l'unique point d'équilibre du système (6) ainsi que sa stabilité linéaire en fonction des paramètres a et b.
3. On suppose que $a = 1$. Utiliser Scilab et l'instruction `ode` pour illustrer graphiquement un cas avec un point d'équilibre stable (pour le système linéarisé) et un autre cas avec un point d'équilibre instable correspondant à deux valeurs de b différentes.

4. On suppose à présent que $a = 1$ et $b = 2.5$. Représenter graphiquement avec Scilab (ou sur votre feuille) une région du quart de plan $\mathbb{R}^2_+$ où toutes les trajectoires $t \mapsto (x(t), y(t))$ partant de l'intérieur de cette région restent pour tout $t > 0$ dans cette région. Vérifier que dans ce cas, les trajectoires se rapprochent d'un cycle limite qu'on tracera avec Scilab.
5. Implémenter la méthode de Heun pour le système (6) avec $(a, b) = (1, 2.5)$ et $(x_0, y_0) = (0.5, 1)$ surl'intervalle de temps $[0, 50]$. Comparer graphiquement le résultat obtenu avec celui utilisant l'instruction `ode`.

   On rappelle que la méthode de Heun s'écrit

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2} \left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + \Delta t f(t_n, y_n)) \right)$$

   avec les notations usuelles.