Ecole Centrale Paris
Equations différentielles et systèmes dynamiques
Tahar Zamene Boulmezaoud & Laurent Dumas
Année universitaire 2016-2017

EXAMEN (aucun document autorisé)

Exercice 1. On considère un système différentiel linéaire de la forme

$$X'(t) = -AX(t) + B, \tag{1}$$

où A est une matrice carrée réelle de taille $n \times n$ constante et B un vecteur constant de $\mathbb{R}^n$ (on identifie l'espace des vecteurs colonnes de taille $n \times 1$ à $\mathbb{R}^n$). On pose

$$S = \{U \in \mathbb{R}^n \mid AU = B\}$$

On supposera dans la suite que $S \neq \emptyset$ et que A est symétrique semi-définie positive (c'est-à-dire vérifiant ${}^tUAU \geq 0$ pour tout $U \in \mathbb{R}^n$).

1. Quelles sont les solutions constantes de (1) ?
2. Soient X et Y deux solutions de (1) sur $[0, +\infty[$. On pose

   $$H(t) = \|X(t) - Y(t)\|^2 \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

   où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne usuelle ($\|U\|^2 = {}^tUU$).
   Montrer que H est décroissante sur $[0, +\infty[$.
3. Soit $t \in [0, +\infty[\mapsto X(t)$ une solution de (1).
   (a) Montrer que X est bornée.
   (b) Montrer qu'il existe $X_\infty \in S$ tel que $\lim_{t \to +\infty} X(t) = X_\infty$.
   (c) Montrer que

   $$\|X(0) - X_\infty\| = \inf_{U \in S} \|X(0) - U\|.$$

Exercice 2. On considère dans l'espace la surface de révolution

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = u(z)^2, \ -h \leq z \leq h\},$$

où $h > 0$ est un paramètre réel fixé et $u(.)$ une fonction de $[-h, h]$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$u(-h) = u(h) = R. \tag{2}$$

Ici $R > 0$ désigne aussi un paramètre réel fixé.

1. Dessiner de façon simplifiée S dans les deux cas suivants :

(a) $u(z) = R$ pour tout $z \in [-h, h]$,

(b) $u(z) = \frac{R}{2}(\frac{z^2}{h^2} + 1)$, pour tout $z \in [-h, h]$.

2. Que représente la quantité

$$A(u) = \int_{-h}^{h} 2\pi u(z)\sqrt{1 + u'(z)^2}dz?$$

3. On cherche à minimiser la valeur de $A(u)$ quand la fonction u décrit l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-h, h]$ satisfaisant la condition (2). Écrire la condition d'optimalité d'Euler-Lagrange et en déduire une équation différentielle satisfaite par la (ou les) fonction(s) réalisant le minimum.

4. On admet dans la suite que toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue dans la question 3 sont de la forme

$$z \mapsto \frac{h}{\alpha}\mathrm{ch}(\frac{\alpha}{h}z), \tag{3}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer (éventuellement par un argument graphique) que

(a) si la rapport $\frac{R}{h}$ est suffisamment petit, alors le problème d'optimisation considéré n'admet aucune solution,

(b) si la rapport $\frac{R}{h}$ est suffisamment grand, alors l'équation d'Euler-Lagrange obtenue admet au moins deux solutions vérifiant les conditions aux extrémités (2).

Exercice 3.

On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0, T] \\ y(0) \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5}$$

où f est C^2 de $[0, T] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté L.

1. On s'intéresse à l'inéquation valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Theta_{n+1} \leq \Theta_{n-1} + 2hL\Theta_n + \alpha_n$$

où $h >$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, Θ_n et α_n sont des réels positifs. Montrer que

$$\sqrt{\Theta_{n+1}^2 + \Theta_n^2} \leq e^{hL}\sqrt{\Theta_n^2 + \Theta_{n-1}^2} + \alpha_n,$$

On pourra commencer par vérifier que la matrice $\begin{pmatrix} 2hL & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $|||A|||_2 \leq e^{hL}$.

2. En déduire une majoration de Θ_n en fonction de Θ_0, Θ_1, h, L, $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1}$.
3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $h = \dfrac{T}{N}$. On définit la suite $(y_n)_{0\leq n\leq N}$ suivante :

$$\begin{cases} y_0 = y(0) \\ y_1 = y_0 + hf(0, y_0) \\ y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(nh, y_n), \quad 1 \leq n \leq N-1 \end{cases} \tag{6}$$

   Majorer l'erreur de consistance du schéma : $\epsilon_0 = y(h) - y(0) - hf(0, y(0))$ et si $1 \leq n \leq N-1$:

$$\epsilon_n = y((n+1)h) - y((n-1)h) - 2hf(nh, y(nh))$$

   en fonction de $M_2 = ||y^{(2)}||$ et $M_3 = ||y^{(3)}||$.
4. Montrer que

$$\max_{0\leq n\leq N} |y_n - y(nh)| \leq Ch^2$$

   où la constante C, à déterminer, dépend de M_2, M_3 L et T.

Exercice 4.

On s'intéresse à nouveau au problème de Cauchy (5) défini à l'exercice précédent où cette fois f est C^4 de $[0, T] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté L. On définit pour tout $k \in \{0, ...4\}$ la dérivée totale de f, notée $f^{[k]}(t, x)$ par les formules : $f^{[0]} = f$ et

$$f^{[k+1]}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} f^{[k]}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f^{[k]}(t, x).f(t, x)$$

On considère le schéma numérique à pas constant $h = \frac{T}{N}$ suivant :

$$y_{n+1} = y_n + hF(nh, y_n, h) \tag{7}$$

avec

$$F(t, x, h) = f(t, x) + haf^{[1]}(t, x) + h^2 bf^{[2]}\left(t + \alpha h, x + \beta hf(t, x)\right)$$

où α, β, a et b sont des paramètres à déterminer.

1. On suppose que $f^{[1]}$ et $f^{[2]}$ sont aussi Lipschitziennes par rapport à x uniformément en t avec constantes L_1 et L_2 respectivement. Démontrer qu'il existe une constante $\Lambda > 0$ indépendante de h telle que

$$|F(t, x, h) - F(t, x^*, h)| \leq \Lambda |x - x^*|$$

   pour tous x et x^* dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les coefficients α, β, a et b de manière que la méthode à un pas définie par la relation (7) soit d'ordre 4.