Ecole Centrale-Supelec
Electif 10 MA2620
Equations différentielles et systèmes dynamiques.

Travaux dirigés
Année universitaire 20017-2018

TD n°1 : Systèmes d'équations différentielles : approximation numérique des solutions.

Exercice 1
On considère l'équation différentielle du second ordre avec conditions initiales

$$(E) \qquad y''(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in [0, T], \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

où $f \in \mathrm{C}^2([0,T] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$. On discrétise l'équation par le schéma

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 f(t_n, y_n), \qquad n \geq 1$$

où $t_n = nh$, $h = T/N$. Majorer l'erreur de consistance

$$\eta(y, h) = \sup_{h \leq t \leq T-h} |f(t, y) - \frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2}|.$$

Exercice 2
Soit le problème de Cauchy $y' = f(t, y), y(0) = y_0$, avec $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ globalement Lipschitzienne par rapport à y, uniformément en t. Etudier la consistance et la stabilité de la méthode de Heun

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{1}{2}f(t_n, y_n) + \frac{1}{2}f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)\right], \quad \text{où} \quad t_n = nh, h = T/N.$$

Exercice 3
On considère le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'_1(t) + 2u_1(t) - u_2(t) + u_1(t)e^{u_1(t)} & = & 0 \\ u'_2(t) - u_1(t) + 2u_2(t) + u_2(t)e^{u_2(t)} & = & 0 \end{array} \right. \qquad t > 0,$$

avec la condition initiale $u_1(0) = u_2(0) = 1$. Dans la suite, on pose $u(t) = \binom{u_1(t)}{u_2(t)}$.

1. Démontrer que si $u(t)$ est solution du problème alors la fonction g définie par $g(t) = \|u(t)\|^2$ est décroissante.
2. Si $h > 0$ est le pas de temps et si $t_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, écrire le schéma d'Euler implicite qui permettra de calculer les approximations u^n de $u(t_n)$ pour $n = 0, 1, 2 \ldots$.
3. Démontrer que si u^n est solution du schéma d'Euler implicite, alors la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $g_n = \|u^n\|^2$ est décroissante.
4. Expliciter la méthode de Newton qui permettra de calculer u^{n+1} à partir de u^n. Effectuer un pas de cette méthode pour calculer u^1 à partir de u^0.

Exercice 4. (examen 2014)

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) \in \mathbb{R}^m \text{ fixé.} \end{array} \right. \tag{2}$$

L'existence et l'unicité de $y \in C^1([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^m)$ vérifiant (2) sont bien assurées en supposant par exemple que la fonction f est continûment différentiable de $[t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ et est globalemement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté L pour la norme choisie sur $\mathbb{R}^m$:

$$\forall t \in [t_0, t_0+T], \quad \forall (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^m)^2, \quad ||f(t, y_2) - f(t, y_1)|| \leq L||y_2 - y_1||$$

1. Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $\Delta T = \frac{T}{N}$. Montrer, en utilisant un théorème de point fixe rappelé clairement, que si $\Delta T L < 1$ la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ suivante :

$$\begin{cases} y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé}, \\ y_{n+1} = y_n + \Delta T f(t_0 + (n+1)\Delta T, y_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

   est bien définie (on parle de la méthode d'Euler implicite).

2. On note $t_n = t_0 + n\Delta T$ et $e_n = y_n - y(t_n)$. Montrer que

$$||e_{n+1}|| \leq (1 + \Delta T L_1)(||e_n|| + ||\epsilon_n||)$$

   où $L_1 = \frac{L}{1 - L\Delta T}$ et ϵ_n désigne l'erreur de consistance :

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

3. En déduire

$$||e_n|| \leq e^{L_1 n \Delta T} ||e_0|| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L_1(n-1-i)\Delta T}(1 + \Delta T L_1)||\varepsilon_i||$$

   puis la convergence de la méthode d'Euler implicite :

$$\lim_{N \to +\infty, y_0 \to y(t_0)} (\max_{0 \leq n \leq N} ||e_n||) = 0$$

   (pour simplifier, on pourra supposer que f est C^1 et en déduire une majoration de $||\epsilon_n||$ en $O(\Delta T)^2$).

Exercice 5. (examen 2015)
On considère le système d'équations différentielles d'inconnues $t \mapsto (x(t), y(t))$ et de paramètres $a > 0$ et $b > 0$ suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - (b+1)x(t) + ax^2(t)y(t) \\ y'(t) = bx(t) - ax(t)^2 y(t) \end{cases} \tag{6}$$

traduisant un système de réactions chimiques faisant intervenir les espèces X, Y, A et B de concentrations respectives $x(t)$, $y(t)$, a et b (ces deux dernières sont donc des constantes indépendantes du temps).

1. Justifier l'existence d'une solution locale au système (6) pour une donnée initiale quelconque $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$.
2. Déterminer l'unique point d'équilibre du système (6) ainsi que sa stabilité linéaire en fonction des paramètres a et b.
3. On suppose que $a = 1$. Utiliser Scilab et l'instruction `ode` pour illustrer graphiquement un cas avec un point d'équilibre stable (pour le système linéarisé) et un autre cas avec un point d'équilibre instable correspondant à deux valeurs de b différentes.

4. On suppose à présent que $a = 1$ et $b = 2.5$. Représenter graphiquement avec Scilab (ou sur votre feuille) une région du quart de plan $\mathbb{R}_+^2$ où toutes les trajectoires $t \mapsto (x(t), y(t))$ partant de l'intérieur de cette région restent pour tout $t > 0$ dans cette région. Vérifier que dans ce cas, les trajectoires se rapprochent d'un cycle limite qu'on tracera avec Scilab.
5. Implémenter la méthode de Heun pour le système (6) avec $(a, b) = (1, 2.5)$ et $(x_0, y_0) = (0.5, 1)$ surl'intervalle de temps $[0, 50]$. Comparer graphiquement le résultat obtenu avec celui utilisant l'instruction `ode`.

   On rappelle que la méthode de Heun s'écrit

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2} \left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + \Delta t f(t_n, y_n)) \right)$$

   avec les notations usuelles.

Exercice 6 (examen 2016)
Soit le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\begin{cases} x' = 2(x - ty) \\ y' = 2y \end{cases}$$

(a) Déterminer la courbe intégrale qui passe par le point (x_0, y_0) au temps $t = 0$.

(b) Le problème est-il bien posé mathématiquement ? Numériquement ?

(c) On utilise la méthode d'Euler explicite avec pas constant h, démarrant au temps $t_0 = 0$. Soit (x_n, y_n) le point atteint au temps $t_n = nh$ $(n \in \mathbb{N})$

   i. Ecrire la relation qui lie (x_{n+1}, y_{n+1}) à (x_n, y_n).

   ii. Calculer explicitement (x_n, y_n) en fonction de n, h, x_0, y_0. On pourra utiliser la suite auxiliaire $z_n = \dfrac{x_n}{(1+2h)^n}$.

   iii. Sans utiliser les théorèmes généraux du cours, vérifier que la solution approchée qui interpole linéairement les points (x_n, y_n) converge sur $\mathbb{R}_+$ vers la solution exacte du système.

(d) Proposer un script Scilab permettant de comparer la solution exacte et la solution approchée précédente dans le cas où $x_0 = y_0 = 1$.

Exercice 7 (examen 2016)
On verse une masse m_s de sucre dans un récipient contenant initialement une quantité d'eau pure pouvant dissoudre au maximum une masse M ; la vitesse de dissolution (masse dissoute par unité de temps), à un instant donné, est proportionnelle à la différence entre M et la masse déjà dissoute à cet instant, indépendament de la masse restante.

(a) Traduire cette loi par une EDO sur la fonction $t \to m(t)$ (masse de sucre dissoute à l'instant t) et donner la forme de la solution faisant apparaitre une constante de temps τ.

(b) Suivant la valeur de m_s, quand la dissolution s'arrête t-elle ?

(c) Au bout de 10 minutes, il reste 40 pour cent de la masse initiale et au bout de 20 minutes, 10 pour cent. En déduire $\frac{m_s}{M}$, τ et le temps correspondant à la dissolution complète.

(d) On suppose $\frac{m_s}{M} = \frac{(e-1)}{e}$ et $\tau = 1$. On cherche à approcher $m(\frac{n}{N})$ $(n \in \{0, ..., N\}$ et $N \in \mathbb{N}^*)$ par la méthode d'Euler explicite sur $[0, 1]$. Exprimer les valeurs $(m_n)_{0 \leq n \leq N}$ ainsi construites et retrouver la convergence de la méthode d'Euler explicite sur cet exemple.

(e) Le problème est-il bien conditionné pour la méthode précédente ?

Exercice 8. (examen 2017)
On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [0,T] \\ y(0) \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5}$$

où f est C^2 de $[0,T] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté L.

(a) On s'intéresse à l'inéquation valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Theta_{n+1} \leq \Theta_{n-1} + 2hL\Theta_n + \alpha_n$$

où $h >$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, Θ_n et α_n sont des réels positifs. Montrer que

$$\sqrt{\Theta_{n+1}^2 + \Theta_n^2} \leq e^{hL}\sqrt{\Theta_n^2 + \Theta_{n-1}^2} + \alpha_n,$$

On pourra commencer par vérifier que la matrice $\begin{pmatrix} 2hL & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $|||A|||_2 \leq e^{hL}$.

(b) En déduire une majoration de Θ_n en fonction de Θ_0, Θ_1, h, L, $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1}$.

(c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $h = \dfrac{T}{N}$. On définit la suite $(y_n)_{0\leq n\leq N}$ suivante :

$$\begin{cases} y_0 = y(0) \\ y_1 = y_0 + hf(0, y_0) \\ y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(nh, y_n), & 1 \leq n \leq N-1 \end{cases} \tag{6}$$

Majorer l'erreur de consistance du schéma : $\epsilon_0 = y(h) - y(0) - hf(0, y(0))$ et si $1 \leq n \leq N-1$:

$$\epsilon_n = y((n+1)h) - y((n-1)h) - 2hf(nh, y(nh))$$

en fonction de $M_2 = ||y^{(2)}||$ et $M_3 = ||y^{(3)}||$.

(d) Montrer que

$$\max_{0\leq n\leq N} |y_n - y(nh)| \leq Ch^2$$

où la constante C, à déterminer, dépend de M_2, M_3 L et T.

Exercice 9. (examen 2017)
On s'intéresse à nouveau au problème de Cauchy (5) défini à l'exercice précédent où cette fois f est C^4 de $[0,T] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté L. On définit pour tout $k \in \{0, ...4\}$ la dérivée totale de f, notée $f^{[k]}(t,x)$ par les formules : $f^{[0]} = f$ et

$$f^{[k+1]}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} f^{[k]}(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} f^{[k]}(t,x).f(t,x)$$

On considère le schéma numérique à pas constant $h = \frac{T}{N}$ suivant :

$$y_{n+1} = y_n + hF(nh, y_n, h) \tag{7}$$

avec

$$F(t,x,h) = f(t,x) + haf^{[1]}(t,x) + h^2 bf^{[2]}\left(t + \alpha h, x + \beta hf(t,x)\right)$$

où α, β, a et b sont des paramètres à déterminer.

(a) On suppose que $f^{[1]}$ et $f^{[2]}$ sont aussi Lipschitziennes par rapport à x uniformément en t avec constantes L_1 et L_2 respectivement. Démontrer qu'il existe une constante $\Lambda > 0$ indépendante de h telle que

$$|F(t,x,h) - F(t,x^*,h)| \leq \Lambda |x - x^*|$$

pour tous x et x^* dans $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer les coefficients α, β, a et b de manière que la méthode à un pas définie par la relation (7) soit d'ordre 4.