1. Résolution d'équations non linéaires

1 (*premier problème de point fixe*) On s'intéresse à la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$ où $f(x) = \cos(x)$.

a) Montrer que l'équation précédente possède une unique solution $\bar{x}$ avec $\bar{x} \in [0, 1]$.

b) Appliquer la méthode de dichotomie par bissection pour trouver une approximation (avec la calculatrice) de $\bar{x}$ à 10^{-6} près.

c) Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ si $n \in \mathbb{N}$. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$. Combien de termes de cette suite doit-on calculer pour obtenir la même précision qu'en b) ?

2 (*second problème de point fixe*)
On s'intéresse à la résolution sur $]2, +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$ où $f(x) = 2\ln(x + 2)$.

a) Montrer que l'équation précédente possède une unique solution $\bar{x}$ avec $\bar{x} \in [3, 4]$.

b) Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - x_n}{f'(x_n) - 1}$$

Montrer par récurrence que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\bar{x}$. En déduire qu'elle converge vers $\bar{x}$.

c) Calculer les cinq premiers termes de la suite précédente. Que penser de la qualité de l'approximation de $\bar{x}$ ainsi obtenue ?

3 (*racines d'un polynôme*)
On s'intéresse à la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$ où $f(x) = x^3 + x - 1$.

a) Montrer que l'équation précédente possède une unique solution $\bar{x}$ avec $\bar{x} \in [\frac{1}{2}, 1]$.

b) Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = \frac{3}{4}$ et $x_{n+1} = 1 - x_n^3$. Déterminer numériquement le comportement de cette suite et l'interpréter graphiquement.

c) Soit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_0 = 1$ et

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

Montrer par récurrence que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\bar{x}$. En déduire qu'elle converge vers $\bar{x}$.

d) Calculer les quatre premiers termes de la suite précédente. Que penser de la qualité de l'approximation de $\bar{x}$ ainsi obtenue ?