MATHEMATIQUES APPLIQUEES, EPF, 2eme ANNEE

TD 2, ANNEE 2007: INTERPOLATION DE FONCTIONS

Exercice 1 (interrogation 2006)

a) Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à une fonction paire et une famille de points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ symétrique par rapport à l'origine est pair.

b) En déduire le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = \cos x$ aux points $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

Exercice 2

Donner une valeur approche de $\cos(\frac{\pi}{5})$ ainsi qu'une majoration de l'erreur commise à l'aide du polynôme interpolateur de Lagrange de la fonction $f(x) = \cos x$ aux points $(0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

Exercice 3 (partiel 2005)

Soit $\epsilon \in]0,1[$ et f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On note

$$a = f(0), \quad b = f(1) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x\in]0,1[} |f^{(3)}(x)|.$$

a) Déterminer le polynme d'interpolation P_ϵ de f relativement aux points 0, ϵ et 1.

b) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour chaque x de l'intervalle $[0,1]$,

$$\lim_{\epsilon->0^+} P_\epsilon(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a.$$

c) Vérifier que le polynme $P(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a$ ainsi obtenu est l'unique polynôme de degré ≤ 2 vérifiant

$$P(0) = a, \quad P'(0) = f'(0), \quad P(1) = b$$

Exercice 4 (rattrapage 2005)

a) Soit $\alpha_i, i = 1 \dots 4$ quatre constantes réelles. Montrer qu'il existe un seul polynôme p de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant les égalités:

$$p(0) = \alpha_1, \quad p'(0) = \alpha_2, \quad p(1) = \alpha_3, \quad p'(1) = \alpha_4.$$

b) Calculer les quatre polynômes $p_i \in \mathcal{P}_3, i = 1 \dots 4$ vérifiant les relations précédentes, avec respectivement:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_i = (1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1).$$

Montrer que le polynôme de la question a) s'écrit comme une combinaison linéaire de p_i:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \, p_i(x).$$

c) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([0,1])$ et soit p_f le polynôme de la question a) avec:

$$\alpha_1 = f(0), \quad \alpha_2 = f'(0), \quad \alpha_3 = f(1), \quad \alpha_4 = f'(1).$$

Montrer que pour chaque point $x \in]0,1[$, il existe un point $\xi_x \in]0,1[$ où on a l'égalité:

$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4!} f^{(4)}(\xi_x), \quad \text{avec} \quad \pi(x) = x^2(x-1)^2.$$

(considérer la fonction φ définie par $\varphi(t) = f(t) - p_f(t) - \frac{f(x)-p_f(x)}{x^2(x-1)^2} t^2(t-1)^2$ pour $x \in]0,1[$ fixé et montrer qu'il existe $\xi \in]0,1[$ tel que $\varphi^{(4)}(\xi) = 0$).