EPF 2, 2006-2007
Mathématiques appliquées

TD 3 : Intégration numérique

Exercice 1.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $h > 0$. On approche f par le polynôme de Lagrange P_0 de degré 0 au point $x = 0$.
a) Calculer $P_0(x)$ et majorer l'erreur $|f(x) - P_0(x)|$ sur $[0,h]$.
b) On pose $I(f) = hf(0)$. Montrer que $I(P_0) = \int_0^h P_0(x)\,dx$ et majorer l'erreur

$$E(f) = \int_0^h f(x)\,dx - I(f).$$

c) On pose pour $a < b$ et $n \geq 1$, $x_k = a + kh$ avec $h = \frac{b-a}{n}$ et $k = 0,\ldots,n$. Soit

$$I_n(f) = h\Big(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\Big).$$

Majorer $E_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - I_n(f)$. Estimer $\int_1^2 1/x\,dx - I_{10}(1/x)$.

Exercice 2.

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $h > 0$. On approche f par le polynôme de Lagrange P_1 de degré 1 aux points $x = 0$ et $x = h$.
a) Calculer $P_1(x)$ et majorer l'erreur $|f(x) - P_1(x)|$ sur $[0,h]$.
b) On pose $I(f) = h(f(0) + f(h)$. Montrer que $I(P_1) = \int_0^h P_1(x)\,dx$ et majorer l'erreur

$$E(f) = \int_0^h f(x)\,dx - I(f).$$

c) On pose pour $a < b$ et $n \geq 1$, $x_k = a + kh$ avec $h = \frac{b-a}{n}$ et $k = 0,\ldots,n$. Soit

$$I_n(f) = h\Big(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + \frac{1}{2}f(x_n)\Big).$$

Majorer $E_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - I_n(f)$. Estimer$\int_1^2 1/x\,dx - I_{10}(1/x)$.

Exercice 3.

Soit $f \in C^4(\mathbb{R})$. On considère la formule de quadrature élémentaire

$$\int_0^1 f(x)\,dx \sim f(0) + 1/6 f'(0) + 1/3 f'(1/2).$$

a) Montrer que cette formule est exacte si $f \in \mathbb{R}_3[X]$. En dédure l'ordre de la fomule.
b)On admet que l'erreur de la méthode précédente est majorée par

$$|E(f)| \leq \frac{1}{720}\|f^{(4)}\|_\infty$$

pour toute fonction $f \in C^4([0,1];\mathbb{R})$. A partir de cette méthode élémentaire, construire une méthode de quadrature pour approcher $\int_a^b f(x)\,dx$ à partir de toute subdivision $a = x_0 < x_1,\ldots,< x_n = b$ d'un intervalle $[a,b]$ et donner une majoration de l'erreur commise.

Exercice 4.

Calculer les noyaux de Peano associés aux méthodes des trapèzes et de Simpson sur l'intervalle $[-1,1]$.