EPF 2, 2006-2007
Mathématiques appliquées

TD 5 : Résolution exacte d'EDO

Exercice 1.

1) Résoudre les équations différentielles ordinaires du second ordre suivantes :

$$\text{a)}\quad y'' - 2y' + y = 0, \quad \text{b)}\quad y'' - y' - 2y = 0\ , \quad \text{c)}\quad y'' - 2y' + 2y = 0$$

2) Résoudre l'équation :

$$y'' + 4y = \tan(t), \quad \text{avec} \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Exercice 2.

On considère l'EDO suivante :

$$(E): \qquad (1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + (1-x^2)y(x) = 0.$$

1) Vérifier que $u(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$ est solution de (E).
2) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ en effectuant le changement de fonction inconnue $y = uz$ et déterminer l'unique solution Y de (E) telle que $Y(0) = 0$ et $Y'(0) = 1$.
3) Donner une solution particulière de

$$x^2y''(x) - 6xy'(x) + 10y(x) = 0.$$

En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 3.

Trouver les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \forall x > 0;$$

Exercice 4.

On considère l'équation de 3^e ordre

$$(E): \qquad y''' + y'' + y' + y = \cos(t), \quad t \geq 0.$$

1) Déterminer la soultion générale de l'équation sans second membre associée à (E).
2) A l'aide de la méthode de variation des constantes, déterminer la solution générale de (E).
3) Montrer que (E) admet une solution et une seule de la forme

$$At\cos(t) + Bt\sin(t) :$$

la déterminer explicitement, et tracer son graphe.