
MATHEMATIQUES APPLIQUEES, EPF, 2eme ANNEE

TD 6, ANNEE 2007: RESOLUTION APPROCHEE D'EDO

Exercice 1

Soit le système différentiel dans \mathbf{R}^2 défini par

$$\begin{cases} x' = 2(x - ty) \\ y' = 2y \end{cases}$$

- Déterminer l'unique solution exacte au système précédent passant par (x_0, y_0) au temps $t = 0$.
- On utilise, pour approcher la solution de ce système, la méthode d'Euler avec pas constant h , démarrant au temps $t_0 = 0$. Soit (x_n, y_n) le point atteint au temps $t_n = nh$ ($n \in \mathbf{N}$)
- Ecrire la relation qui lie (x_{n+1}, y_{n+1}) à (x_n, y_n) . Calculer explicitement (x_n, y_n) en fonction de n, h, x_0, y_0 (on pourra poser $z_n = x_n/(1 + 2h)^n$ et trouver une relation de récurrence simple satisfaite par z_n).
- On pose $h = \frac{T}{N}$. Vérifier que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (|x(T) - x_N|^2 + |y(T) - y_N|^2) = 0$$

et donner en fonction de N , l'ordre de grandeur de l'erreur commise en remplaçant la solution exacte par la solution approchée.