

---

# MATHEMATIQUES APPLIQUEES, EPF, 2eme ANNEE

## TD 6, ANNEE 2007: RESOLUTION APPROCHEE D'EDO

### Exercice 1

Soit le système différentiel dans  $\mathbf{R}^2$  défini par

$$\begin{cases} x' = 2(x - ty) \\ y' = 2y \end{cases}$$

- Déterminer l'unique solution exacte au système précédent passant par  $(x_0, y_0)$  au temps  $t = 0$ .
- On utilise, pour approcher la solution de ce système, la méthode d'Euler avec pas constant  $h$ , démarrant au temps  $t_0 = 0$ . Soit  $(x_n, y_n)$  le point atteint au temps  $t_n = nh$  ( $n \in \mathbf{N}$ )
- Ecrire la relation qui lie  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  à  $(x_n, y_n)$ . Calculer explicitement  $(x_n, y_n)$  en fonction de  $n, h, x_0, y_0$  (on pourra poser  $z_n = x_n/(1 + 2h)^n$  et trouver une relation de récurrence simple satisfaite par  $z_n$ ).
- On pose  $h = \frac{T}{N}$ . Vérifier que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (|x(T) - x_N|^2 + |y(T) - y_N|^2) = 0$$

et donner en fonction de  $N$ , l'ordre de grandeur de l'erreur commise en remplaçant la solution exacte par la solution approchée.