EPF 2, 2006-2007
Mathématiques appliquées

Contrôle continu

Exercice 1.

On définit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, x \to x + \frac{1}{1+e^x}$.
a) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et que $0 < f'(x) < 1$ pour tout x.
b) Démontrer que f n'a pas de point fixe sur $\mathbb{R}$. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la suite $(x_n)_n$?
c) L'application f est-elle contractante ? Comparer cette situation avec celle du théorème du point fixe.

Exercice 2.

Soit $f(x) = e^x$ pour $0 \leq x \leq 2$.
a) Approcher $f(0.25)$ par une interpolation de Lagrange aux points $x_0 = 0$ et $x_1 = 0.5$.
b) Approcher $f(0.75)$ par une interpolation de Lagrange aux points $x_0 = 0.5$ et $x_1 = 1$.
c) Approcher $f(0.25)$ et $f(0.75)$ par une interpolation de Lagrange de second ordre aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
d) Quelles sont les meilleures approximations ? Pourquoi ?