EPF 2ème année — Sceaux, le 30 Avril 2007

Mathématiques Appliquées (M. Blouza et Dumas)

corrigé PARTIEL MATHEMATIQUES APPLIQUEES

(2heures, aucun document, calculatrice EPF autorisée)

Ex 1. (*total : 10 pts*) a) Il s'agit d'une parabole d'axe Oy et de sommet $(0, \frac{1}{4})$ (*1 pt*). On a $\phi(x) = x$ équivaut à $x^2 + \frac{1}{4} = x$, soit $x = \frac{1}{2}$ (racine double) (*1 pt*). On constate ensuite que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) \geq x$$

ce qui implique en particulier que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x_{p+1} = \phi(x_p) \geq x_p$, à savoir que la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante (*2 pts*). Deux cas sont alors possibles (qu'on peut conjecturer d'abord sur un dessin) :

1. Si $|x_0| \leq \frac{1}{2}$: dans ce cas $x_p \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. On le démontre par récurrence : c'est vrai pour $p = 0$ et en supposant que ce soit vrai au rang p, on a

$$0 \leq x_{p+1} = x_p^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$$

ce qui implique que la propriété est vraie au rang $p + 1$. La suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et bornée, elle converge donc nécéssairement vers l'unique point fixe de ϕ à savoir $\frac{1}{2}$ (*4 pts*).

2. Si $|x_0| > \frac{1}{2}$: dans ce cas on a $x_1 = x_0^2 + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$. La suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ étant croissante, elle ne peut converger car ce serait dans ce cas vers $\frac{1}{2}$, ce qui est impossible. Elle diverge donc vers $+\infty$ (*2 pts*).

b) Lorsque $c = 0$, la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ possède une expression explicite :

$$x_p = (x_0)^{2^p}$$

qu'on établit aisément par récurrence. Trois cas sont alors possibles :

1. Si $|x_0| < 1$: la suite converge vers 0.

2. Si $|x_0| = 1$: la suite converge vers 1.

3. Si $|x_0| > 1$: la suite diverge vers $+\infty$. (*2 pts*)

Ex 2. (*total : 10 pts*) a) La formule doit être vraie pour les polynômes $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ ce qui donne les 4 relations suivantes (*2 pts*) :

$$\begin{cases} (\beta + 2) = 2 \\ \alpha(\beta u_0 + u_1) = 0 \\ \alpha(\beta u_0^2 + u_1^2) = \frac{2}{3} \\ \alpha(\beta u_0^3 + u_1^3) = 0 \end{cases}$$

En multipliant la 2ème équation par u_0^2 et en soustrayant avec la 4ème équation, on trouve $\alpha u_1(u_0^2 - u_1^2) = 0$ ce qui implique nécéssairement que $u_0 = -u_1$ ($\alpha \neq 0$ et $u_1 \neq u_0 \neq 0$). On en déduit avec la deuxième équation que $\beta = 1$ puis $\alpha = \frac{2}{3}$ (première équation) puis enfin que $u_0 = -u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (deuxième équation) (*2 pts*).

b) Par le changement de variable $u \mapsto x = a_0 + \frac{h}{2} + u\frac{h}{2}$ de $[-1, 1]$ dans $[a_0, a_0 + h]$, on trouve la méthode de quadrature suivante :

$$\int_{a_0}^{a_0+h} f(x)dx \simeq \frac{1}{3}h(f(a_0 + \frac{h}{2} + \frac{h}{2\sqrt{2}}) + f(a_0 + \frac{h}{2}) + f(a_0 + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\sqrt{2}}))$$

avec une erreur associée telle que

$$|E(f) \leq \frac{h^5}{32 * 360}||f^{(4)}||_\infty = \frac{h^5}{11520}||f^{(4)}||_\infty$$

(3 pts)

c) A partir de cette méthode élémentaire, on construit une méthode de quadrature pour approcher $\int_a^b f(x)dx$ à partir de toute subdivision régulière $a = x_0 < x_1, ..., < x_n = b$: par la relation

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{n=0}^{n-1} \frac{1}{3}h(f(x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2\sqrt{2}}) + f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\sqrt{2}}))$$

avec une erreur associée

$$|E(f) \leq \frac{(b-a)^5}{11520n^4}||f^{(4)}||_\infty$$

(3 pts)

Ex 3.(*total : 15 pts*). a) Ici, $f(t,x) = x^2+4$ et la fonction f ainsi que sa dérivée partielle par rapport à x, en l'occurence $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 2x$ sont continues et bornées sur tout rectangle de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ contenant $(0, x_0)$.Le théorème de Cauchy Lipschitz assure donc l'existence et l'unicité locales d'une solution de (2) avec la condition $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$. *(2 pts)*

b) Si une solution x de (2) prend la valeur 2 ou -2 en un certain $t_0 \in \mathbb{R}$, alors, par l'uncité dans le théorème de Cauchy Lipschitz, on en déduit que $x(t) = 2$ ou $x(t) = -2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (car ces deux dernières fonctions sont bien solution de (2)).*(2 pts)*

c) On peut soit remarquer qu'il s'agit d'une EDO à variable séparable, soit d'une EDO de Ricatti. En choisissant ce dernier cas, $x = 2$ est solution évidente, on effectue donc le changement de fonction $z = x - 2$, ce qui donne l'EDO de Bernoulli suivante : $z'(t) = z^2(t) + 4z(t)$.

On effectue alors le changement de fonction $v = \frac{1}{z}$, ce qui donne $-v'(t) = 1 + 4v(t)$. Il s'agit d'une EDO ayant la solution évidente $v = -\frac{1}{4}$ qui s'intègre donc en $v(t) = C\exp(-4t) - \frac{1}{4}$, soit en revenant à x :

$$x(t) = \frac{1}{C\exp(-4t) - \frac{1}{4}} + 2$$

(sous réserve que le dénominateur soit non nul). La condition $x(0) = x_0$ implique que

$$x_0 = \frac{1}{C - \frac{1}{4}} + 2$$

soit

$$C = \frac{1}{4} + \frac{1}{x_0 - 2} = \frac{x_0 + 2}{4(x_0 - 2)}$$

(5 pts)

La solution 'explose' si le dénominateur dans x s'annule à savoir si

$$\frac{x_0 + 2}{4(x_0 - 2)}\exp(-4t) = \frac{1}{4}$$

soit pour

$$t_f = \frac{1}{4}\ln(\frac{x_0 + 2}{x_0 - 2})$$

lorsque x_0 n'appartient pas à $[-2, 2]$. (sinon, la solution est définie sur $\mathbb{R}$ entier). *(2 pts)*

d) Lorsque $x_0 \in]-2, 2[$, les solutions sont décroissantes et tendent vers 2 en $-\infty$ et -2 en $+\infty$. Lorsque $x_0 > 2$, les solutions sont croissantes, tendent vers 2 en $-\infty$ et explosent vers $+\infty$ en t_f.Lorsque $x_0 < -2$, les solutions sont croissantes, tendent vers -2 en $+\infty$ et explosent vers $-\infty$ en t_f.((*4 pts*).