1. Résolution d'équations non linéaires

1.1 (*premier problème de point fixe*) On s'intéresse à la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$ où $f(x) = \cos(x)$.

a) Montrer que l'équation précédente possède une unique solution $\bar{x}$ avec $\bar{x} \in [0, 1]$.

b) Appliquer la méthode de dichotomie par bissection pour trouver une approximation (avec la calculatrice) de $\bar{x}$ à 10^{-6} près.

c) Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ si $n \in \mathbb{N}$. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$. Combien de termes de cette suite doit-on calculer pour obtenir la même précision qu'en b) ?

1.2 (*second problème de point fixe*)
On s'intéresse à la résolution sur $]2, +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$ où $f(x) = 2\ln(x + 2)$.

a) Montrer que l'équation précédente possède une unique solution $\bar{x}$ avec $\bar{x} \in [3, 4]$.

b) Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - x_n}{f'(x_n) - 1}$$

Montrer par récurrence que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\bar{x}$. En déduire qu'elle converge vers $\bar{x}$.

c) Calculer les cinq premiers termes de la suite précédente. Que penser de la qualité de l'approximation de $\bar{x}$ ainsi obtenue ?

1.3 (*racines d'un polynôme*)
On s'intéresse à la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$ où $f(x) = x^3 + x - 1$.

a) Montrer que l'équation précédente possède une unique solution $\bar{x}$ avec $\bar{x} \in [\frac{1}{2}, 1]$.

b) Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = \frac{3}{4}$ et $x_{n+1} = 1 - x_n^3$. Déterminer numériquement le comportement de cette suite et l'interpréter graphiquement.

c) Soit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_0 = 1$ et

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

Montrer par récurrence que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\bar{x}$. En déduire qu'elle converge vers $\bar{x}$.

d) Calculer les quatre premiers termes de la suite précédente. Que penser de la qualité de l'approximation de $\bar{x}$ ainsi obtenue ?

1.4 On veut approcher une racine multiple r d'une fonction f ayant le développement limité suivant au voisinage de r,

$$f(x) = (x-r)^p + (x-r)^{p+1} + o((x-r)^{p+1}).$$

On suppose de plus que f' a pour développement limité au voisinage de r,

$$f'(x) = p(x-r)^{p-1} + (p+1)(x-r)^p + o((x-r)^p).$$

On utilise la méthode de Newton : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = 0$, et on pose $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
On suppose que x_n converge vers r.
a) Montrer que, dans un voisinage de r

$$F(x) = r + \frac{p-1}{p}(x-r) + 1/p^2(x-r)^2 + o((x-r)^2).$$

b) Soit $e_n = x_n - r$, montrer que

$$e_{n+1} = \frac{p-1}{p}e_n + 1/p^2 e_n^2 + o(e_n^2).$$

Commenter la méthode suivant les valeurs de p.

1.5 Utiliser la méthode de Newton pour résoudre les équations :

$$x^3 = 2, \quad x^5 = 3, \quad e^x + x = 0, \quad \ln x + x, \quad \sin x = 1 - 2x.$$