TD MATHEMATIQUES APPLIQUEES No.1:

SYSTEMES NON LINEAIRES

1. Soit f la fonction d'une variable réelle définie pour tout élément x non nul de $[-1,1]$ par

$$f(x) = \frac{\text{Arcsin}(x)}{x^2}$$

Préciser le domaine de dérivabilité de f et calculer f'.

2. Soit g la fonction définie sur $[0,1[$ par

$$\begin{cases} g(x) = x^3 f'(x) & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

a) Etudier les variations de g.

b) Déduire de l'étude précédente que f' admet dans $]0,1[$ un unique zéro, noté α, tel que $\frac{\sqrt(2)}{2} < \alpha < 1$.

c) Déduire de ce qui précède le tableau de variation de f.

3. a) Vérifier que f est de classe C^2 sur $]0,1[$ et calculer f''.

b) Soit h la fonction définie sur $[0,1[$ par:

$$\begin{cases} h(x) = x^4 f''(x) & , x > 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

Etudier les variations de h.

4. On pose $\beta = \text{Arcsin}(\alpha)$. On se propose de déterminer une valeur approchée de β à la précision de 10^{-8} par une méthode itérative.

a) Montrer que β est l'unique solution sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation $\tan(y) = 2y$ et donner une valeur approchée de β à la précision 10^{-1}.

b) Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\tan(u_n)$$

Indiquer pourquoi cette méthode ne convient pas pour le but proposé.

c) On considère la suite (v_n) définie par son premier terme $v_0 = 2$ et par la relation de récurrence

$$v_{n+1} = \text{Arctan}(2v_n)$$

Montrer que cette suite converge vers β et déterminer un réel $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad |v_n - \beta| \leq k^n |v_0 - \beta|$$

En déduire un nombre d'itérations N à partir duquel la précision 10^{-8} est atteinte et déterminer une valeur approchée de β à cette précision.

d) Déduire de ce qui précède des valeurs approchées de α et $f(\alpha)$. Quelles sont les précisions obtenues?

5. On se propose de déterminer une valeur approchée de β par la méthode de Newton.

a) Etudier la fonction ϕ définie sur $[0,+\infty[$ par $\phi(t) = t - \text{Arctan}(2t)$ et donner l'allure de sa courbe représentative.

b) Soit la fonction ψ définie par:

$$\psi(t) = t - \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}$$

Montrer que ψ est définie sur $[1,+\infty[$ et que $\forall t \geq \beta, \quad \psi(t) \geq \beta$.

c) Soit la suite (w_n) définie par son premier terme $w_0 = 1.2$ et par la relation de récurrence $w_{n+1} = \psi(w_n)$. Montrer que la suite (w_n) est décroissante et converge vers β.

d) Déterminer grâce à cet algorithme une valeur approchée de β à la précision de 10^{-8}.

6. Exprimer en fonction de β la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_\alpha^1 f(t)dt$. Déterminer une valeur approchée de I à la précision 10^{-7}.