Approximation des fonctions

January 31, 2002

1. Soit une fonction $f \in C^1[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) \neq 0$ et telle que f possède un zéro p, $f(p) = 0$. Soient aussi $x_0, x_1, \dots, x_n$ des nombres réels distincts dans $[a,b]$ tels que $f(x_i) = y_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

a) Chercher une valeur approchée de p, à partir d'une interpolation polynomiale de degré n de f^{-1}, en les nombres $y_0, y_1, \dots, y_n$.

b) Formuler une méthode générale de calcul approché de zéro d'une fonction à partir des résultats obtenus précédemment;

c) Determiner un zéro de la fonction $f(x) = \tan(x) - 2x$ définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

d) Comparer ce résultat avec celui obtenu pour la même fonction dans la feuille d'exercices précédente.

2. Soit la fonction $f(x) = e^x$, $0 \leq x \leq 1$. On considère les nombres $x_0 = 0,1$, $x_i = 2x_{i-1}$, $i \in \{1, 2, 3\}$. On se propose de :

a) Donner une approximation polynomiale de f en faisant usage des trois méthodes étudiées.

b) Dans chaque cas, donner un valeur approchée de $\sqrt[3]{e}$, et donner une borne pour l'erreur en fonction du pas de l'interpolation.

3. Considérons la fonction $f(x) = \cos(\pi x)$ et ses valeurs en les points, $x = 0$; $0,25$; $0,5$; $0,75$ et $1,0$. On cherche à :

a) Construire une approximation spline cubique pour f;

b) Intégrer le résultat obtenu précédemment sur l'intervalle $[0,1]$.

c) Comparer le résultat de b) avec la vraie valeur de $\int_0^1 \cos(\pi x) dx$. Ensuite, donner une approximation pour $f'(0,5)$ et $f''(0,5)$, à partir de l'approximation spline cubique de f et comparer ces résultats avec les vraies valeurs.

4. a) Soit la fonction $f(x) = x^k$, $x \in [a,b]$, $k \in \{0,1,\dots,n\}$. Donner pour l'ensemble de points $x_0, \dots x_n$ l'expression de l'interpolation polynomiale de Lagrange de f.

b) Montrer que l'ensemble $\mathbf{P}^n$ des polynômes sur $\mathbf{R}$ de degré inférieur ou égale à $n \in \mathbf{N}$ est un espace vectoriel et que les fonctions

$$e_o(x) = 1; \;\; e_1(x) = x - x_1; \;\; \dots, e_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

où $x_i \in \mathbf{R}$, $i \in \{0,1,\dots\}$ fournissent une base de $\mathbf{P}^n$. Déduire l'expression de l'interpolation polynomiale de Lagrange de f à partir de cette base.

c) Considèrons l'espace des fonctions $C([a,b],\mathbf{R})$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On munit cet espace d'un produit scalaire, $<,>$, défini par

$$< f, g >= \int_a^b f(x).g(x)dx.$$

Montrer que les polynômes définis sur $[-1,1]$ par

$$P_0(x) = 1; \; P_1(x) = x, \; P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}; \; P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}$$

et

$$P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35};$$

sont orthogonaux.

d) Montrer que les fonctions

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; \phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(x), \; \dots, \; \phi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(nx)$$

sont également orthogonales.

5. Considérons les fonctions $f(x) = x^2 + 3x + 2$, pour $x \in [0,1]$ et $g(x) = e^x$, pour $x \in [0,2]$. Chercher la meilleure approximation polynomiale de degré 4 pour les fonctions f et g au sens de la norme L^2.