TD MATHEMATIQUES APPLIQUEES No.3: CALCUL APPROCHE D'INTEGRALES

1. (*Lemme technique*)
Soit $a > 0$ et $g \in C^5(]-a, a[, \mathbf{R})$, impaire. Montrer que si $|x| < a$, il existe un réel ξ entre 0 et x tel que

$$g(x) = \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) - \frac{x^5}{180} g^{(5)}(\xi)$$

(Indication: considérer la fonction auxiliaire $h(t) = g(t) - \frac{t}{3}(g'(t) + 2g'(0)) + \frac{\alpha}{180}t^5$ avec α tel que $h(x) = 0$).

2. (*Estimation d'erreur dans la méthode de Simpson*)
Soit $f \in C^5([a, b], \mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4f'(\frac{a+b}{2})\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi).$$

En déduire une estimation de l'erreur commise par la méthode de Simpson appliquée à une fonction $g \in C^4([a, b], \mathbf{R})$.

3 (*Application au calcul d'une valeur approchée de* π)
a) Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.
b) Simplifier l'expression $J = 4.\frac{1}{6}(\frac{1}{1+0^2} + 4.\frac{1}{1+\frac{1}{2}^2} + \frac{1}{1+1^2})$ et vérifier que c'est une valeur approchée de π à 10^{-2} près.
c) Majorer la valeur absolue de la dérivée quatrième de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$ et déduire de la question 2 le nombre d'intervalles intervenant dans une subdivision régulière de $[0, 1]$ pour obtenir les 25 premiers chiffres de l'écriture décimale de π.