TD 4 - Résolution exacte d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

1. Trouver les solutions générales des l'équations qui suivent et donner leurs représentations graphiques.

   (a) $e^y \frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$;

   (b) $\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sin(t) - r\operatorname{tang}(t)}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

   (c) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{xy^2}$, $x > 0$.

   (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$

2. Trouvez la solution de l'équation différentielle

$$2x\sin(y)dx + (x^2\cos(y) - 1)dy = 0$$

   qui passe par le point $(0, \frac{1}{2})$

3. Montrez que l'équation

$$(e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}} + \frac{1}{1+x^2})dx + e^{\frac{y}{x}}dy = 0$$

   est exacte, et trouvez sa solution générale.

4. Une piscine de 40000 litres a son eau renouvelée au rythme de 200 litres par heures. Par accident l'eau de regénération est polluée avec une concentration de 5 pour cent par un produit toxique dont on sait qu'une concentration supérieure à 3 pour cent peut être dangereuse. Comment varie la concentration du produit toxique en fonction du temps, la concentration dangereuse est-elle atteinte au bout de combien de temps?

5. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ et soit $\alpha : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue avec $x_0 \in I$. Montrez qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = \alpha(x)y$ telle que $y(x_0) = y_0$.