TD MATHEMATIQUES APPLIQUEES No.5:

E.D.O. D'ORDRE 2

1. Résoudre sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, les équations différentielles suivantes:

a) $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{\exp(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$

b) $x^2 y'' + xy' + y = 0$

c) $x(x+1)y'' + (2+x)y' - y = 0$

d) $y''' = 3yy'$ avec $y(0) = y'(0) = 1$ et $y''(0) = \dfrac{3}{2}$

2. a) Soit $\phi \in C^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ telle que $\exists C \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}_+, t\phi(t) \leq C + \int_0^t \phi(s)ds$. Montrer que ϕ est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

b) Soit $y \in C^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ une solution de l'EDO linéaire d'ordre 2 sur $\mathbf{R}_+$:

$$y'' + xy = 0$$

Peut-on résoudre explicitement cette EDO? A l'aide de a), montrer que y est bornée.

3. Une suspension peut être schématisée par une masse m reposant sur un ressort (de longueur à vide l_0 et de raideur k) en parallèle avec un amortisseur (force de frottement égale à $-\mu\vec{v}$) dont on néglige les masses. La position est repérée par la coordonnée $x(t)$.

a) Quelle est la position d'équilibre x_0? Ecrire l'EDO à laquelle obéit $x(t)$, puis celle de $X(t) = x(t) - x_0$ et donner sa solution générale. Montrer qu'elle est amortie; à quelle condition est-elle pseudo-périodique?

b) Le véhicule roule maintenant à vitesse constante sur une route accidentée; dans le référentiel galiléen se déplaçant horizontalement à la vitesse $\vec{V}$, le support de la suspension se déplace donc verticalement sur l'axe Ox; on note $h(t)$ sa position. Ecrire la nouvelle EDO pour $X(t)$; dans le cas sinusoidal, $h(t) = H\cos(\omega t)$, donner l'amplitude A de l'oscillation de $X(t)$ en régime permanent, ainsi que son déphasage par rapport à $h(t)$.

c) Que devient le rapport $\frac{A}{H}$ quand ω tend vers 0 (respectivement $+\infty$)? Mettre en évidence le phénomène de résonance par une amplification des oscillations dans le cas où μ est petit.