Équations différentielles ordinaires

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y' + y = e^{-x}$.

2. Déterminer les solutions maximales de (E) : $y' = y^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et vérifier si elles sont globales.

3. Résoudre l'équation différentielle : $xy' - y = x^2 \arctan x$. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

4. Résoudre l'équation différentielle homogène suivante : $xy'(2y - x) = y^2$.

5. Résoudre l'équation de Bernoulli suivante : $yy' - y^2 \tan(x) = 1$.

6. Soit l'équation différentielle (de Riccati) :

$$(1 - x^3)y' - y^2 + x^2 y = -2x. \tag{1}$$

1) Vérifier que la fonction $x \mapsto -x^2$ est une solution particulière de (1), puis effectuer le changement de fonction inconnue $y = u - x^2$.
2) Transformer l'équation obtenue, en la divisant par u^2 et en posant $v = \dfrac{1}{u}$
3) Résoudre cette dernière équation.
4) Résoudre (1).

7. Soit l'équation différentielle :

$$x^3(x-1)y'' + 3x^2 y' - 2x + 5 = 0. \tag{2}$$

1) Montrer que $\dfrac{1}{x}$ est une solution particulière de (2) sur $]0, +\infty[$.
2) Résoudre (2) sur $]0, 1[$ et sur $]0, +\infty[$ en posant $y = \dfrac{1}{x} + z$.
3) Existe-t-il des solutions sur $]0, +\infty[$.

8. Soit l'équation différentielle :

$$xy' + 2y = \frac{x}{1 + x^2}. \tag{3}$$

1) Montrer que cette équation possède une unique solution f définie sur $\mathbb{R}$
2) Calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

9. Soit l'équation différentielle :

$$xy' - (x+1)y + e^x(x^2 + 1) = 0. \tag{4}$$

1) Résoudre l'équation différentielle sur les intrevalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ Montrer que cette équation possède une unique solution définie sur $\mathbb{R}$
2) Rechercher les solutions de (4) définies sur $\mathbb{R}$.