EPF
Mathématiques appliquées
2004–2005

Approximation d'équations différentielles

1. On approche la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = a, \quad t \in [t_0, t_0 + T] \end{cases}$$

par le schéma d'Euler :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad t_n = t_0 + nh, \quad 0 \leq n \leq N \\ y_0 \quad \text{donnée} \end{cases}$$

où $h = T/N$, et f une fonction de classe C^1, L-lipschitzienne par rapport à y.
1) (Consistance) Soit ε_n tel que

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + h\varepsilon_n$$

Montrer qu'il existe une constante M telle que

$$\sigma_n = \sup_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon_n| \leq Mh.$$

2) (Stabilité) On pose $r_n = |y(t_n) - y_n|$. Montrer que $r_{n+1} \leq (1 + hL)r_n + Mh^2$, puis

$$r_n \leq (1 + hL)^n r_0 + \frac{(1 + hL)^n - 1}{hL} Mh^2.$$

En déduire, grâce à $1 + x \leq e^x$ que

$$|y(t_n) - y_n| \leq e^{LT}|y(t_0) - y_0| + \frac{e^{LT} - 1}{L} Mh.$$

3) (Convergence) On choisit $y_0 = a$. Montrer que

$$\sup_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n| \to 0, \quad \text{quand} \quad N \to \infty.$$

4) Estimer l'erreur commise pour l'approximation de

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t}{2} \sin(y(t)), \quad t \in [0, 2] \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

2. Appliquer la méthode d'Euler pour résoudre

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) & t \in [0,1] \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

avec $h = 1$, $h = 0.5$ et $h = 0.1$.

3. 1) Donner la solution exacte de :

$$\begin{cases} y'(t) = -150y(t) + 30, & t \in [0,1] \\ y(0) = 1/5, \end{cases} \tag{1}$$

2) Supposons que la donnée initiale $y(0)$ est connue à un ε près. Quelle est la solution exacte de

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = -150\tilde{y}(t) + 30, & t \in [0,1] \\ \tilde{y}(0) = 1/5 + \varepsilon, \end{cases}$$

3) a) Ecrire le schéma d'Euler, avec un pas constant h, pour résoudre (1). Montrer que

$$y_n - \frac{1}{5} = (1 - 150h)^n (y_0 - \frac{1}{5})$$

b) Supposons $h = 1/50$. Pour une erreur initiale $y_0 = 1/5 + \varepsilon$, calculer $y_{50} - y(1)$.
4) Quelle condition nécessaire doit-on imposer à h pour que le schéma converge.

4. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + ty_2(t), & t \in [0,2] \\ y_2'(t) = ty_1(t) + y_2(t), & t \in [0,2] \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = 3 \end{cases} \tag{2}$$

1) Montrer que (2) admet une unique solution.
2) On pose $z = (y_1, y_2)$. Ecrire l'algorithme d'Euler pour le système (2) pour un pas de discrétisation $h = 2/N$ et $t_n = nh$. Calculer z_1 et z_2 pour $N = 20$.
3) Estimer l'erreur commise pour $N = 2000$.

5. Ecrire le schéma d'Euler pour l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = xe^{-|x|} \qquad\qquad x(0) = x_o \in \mathbb{R} \text{ donné}$$

Donner une estimation précise de l'erreur de consistance.

Donner une estimation précise de la constante de stabilité.