
MATHEMATIQUES APPLIQUEES, EPF, 2eme ANNEE

TD 2, ANNEE 2006: INTERPOLATION DE FONCTIONS

Exercice 1

Soit $f \in \mathcal{C}([-2, 2], \mathbf{R})$ une fonction passant par les points $(-2, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$ et $(2, 0)$. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de f passant par les 5 points précédents.

Exercice 2

Soit $\epsilon \in]0, 1[$ et f une fonction \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. On note

$$a = f(0), \quad b = f(1)$$

a) Déterminer le polynôme d'interpolation P_ϵ de f relativement aux points $0, \epsilon$ et 1 .

b) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que pour chaque x de l'intervalle $[0, 1]$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P_\epsilon(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a.$$

c) Vérifier que le polynôme $P(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a$ ainsi obtenu est l'unique polynôme de degré ≤ 2 vérifiant

$$P(0) = a, \quad P'(0) = f'(0), \quad P(1) = b$$

Exercice 3

a) Soit $\alpha_i, i = 1 \dots 4$ quatre constantes réelles. Montrer qu'il existe un seul polynôme p de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant les égalités:

$$p(0) = \alpha_1, \quad p'(0) = \alpha_2, \quad p(1) = \alpha_3, \quad p'(1) = \alpha_4.$$

b) Calculer les quatre polynômes $p_i \in \mathcal{P}_3, i = 1 \dots 4$ vérifiant les relations précédentes, avec respectivement:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_i = (1, 0, 0, 0), \quad (0, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 1, 0), \quad (0, 0, 0, 1).$$

Montrer que le polynôme de la question a) s'écrit comme une combinaison linéaire de p_i :

$$p(x) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i p_i(x).$$

c) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([0, 1])$ et soit p_f le polynôme de la question a) avec:

$$\alpha_1 = f(0), \quad \alpha_2 = f'(0), \quad \alpha_3 = f(1), \quad \alpha_4 = f'(1).$$

Montrer que pour chaque point $x \in]0, 1[$, il existe un point $\xi_x \in]0, 1[$ où on a l'égalité:

$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4!} f^{(4)}(\xi_x), \quad \text{avec} \quad \pi(x) = x^2(x-1)^2.$$

(considérer la fonction φ définie par $\varphi(t) = f(t) - p_f(t) - \frac{f(x) - p_f(x)}{x^2(x-1)^2} t^2(t-1)^2$ pour $x \in]0, 1[$ fixé et montrer qu'il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que $\varphi^{(4)}(\xi) = 0$).