MATHEMATIQUES APPLIQUEES, EPF, 2eme ANNEE
TD 3, ANNEE 2006: CALCUL APPROCHE D'INTEGRALES

Exercice 1.(*partiel 2004*)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,T],\mathbf{R})$. On note $RG_n(f)$, $RD_n(f)$ et $TR_n(f)$, l'approximation de $\int_0^T f(x)dx$ par les méthodes respectives des rectangles à gauche, à droite et des trapèzes sur $n+1$ points équirépartis.

a) Montrer que $RG_n(f) = RD_n(f) = TR_n(f)$ si $f(0) = f(T)$.

b) Déterminer pour quelles valeurs de n, TR_n permet d'obtenir une approximation de $\int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos x + 2)}dx$ à une précision de 10^{-8}. On rappelle que si $f \in \mathcal{C}^2([0,T],\mathbf{R})$,

$$|\int_0^T f(x)dx - TR_n(f)| \leq \frac{T^3}{12n^2}||f^{''}||_\infty$$

Exercice 2 Soit $f \in C^1([0,1]$. On considère la formule de quadrature élémentaire:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \sim f(0) + \frac{1}{6}f'(0) + \frac{1}{3}f'(\frac{1}{2})$$

a) Montrer que cette formule est exaxte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

b) On admet que l'erreur $E(f)$ de la méthode précédente est majorée par

$$|E(f)| \leq \frac{1}{720}||f^{(4)}||_\infty$$

pour toute fonction $f \in C^4([0,1],\mathbf{R})$. A partir de cette méthode élémentaire, construire une méthode de quadrature pour approcher l'intégrale d'une fonction $f \in C([a,b],\mathbf{R})$ à partir de toute subdivision $a = x_0 < x_1 ... < x_n = b$ d'un intervalle $[a,b]$ et donner une majoration de l'erreur commise.

Exercice 3 (*calcul d'une valeur approchée de* π)

a) Donner la valeur de $I = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

b) Simplifier l'expression $J = 4.\frac{1}{6}(\frac{1}{1+0^2} + 4.\frac{1}{1+\frac{1}{2}^2} + \frac{1}{1+1^2})$ et vérifier que c'est une valeur approchée de π à 10^{-2} près.

c) Majorer la valeur absolue de la dérivée seconde et de la dérivée quatrième de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0,1]$. Comparer alors le nombre d'intervalles intervenant dans une subdivision régulière de $[0,1]$ pour obtenir une approximation de π à 10^{-10} près en utilisant respectivement les méthodes des trapèzes et de Simpson pour approcher I.