Exercice GROUPE B

a) Montrer que le polynome d'interpolation de Lagrange associé à une fonction paire et une famille de points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ symétrique par rapport à l'origine est pair.

b) En déduire le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = \cos x$ aux points $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

Correction

a) Deux cas sont possibles :

(i) 0 n'est pas élément de la famille : dans ce cas, on a $n = 2q+2$ et on peut décomposer la famille de la manière suivante : $(x_i)_{0\leq i\leq q}$ et $(-x_i)_{0\leq i\leq q}$ avec $x_i > 0$. On note l_i et $\tilde{l}_i$ les polynômes de base de Lagrange associés. On a alors

$$P(x) = \sum_{i=0}^{q}(f(x_i)l_i(x) + f(-x_i)\tilde{l}_i(x)) = \sum_{i=0}^{q} f(x_i)(l_i(x) + \tilde{l}_i(x))$$

En écrivant les expressions de l_i et $\tilde{l}_i$, on a

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i, j=0}^{q}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(x_i-x_j)}\frac{\prod_{j=0}^{q}(x+x_j)}{\prod_{j=0}^{q}(x_i+x_j)} = \frac{(x+x_i)\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(x^2-x_j^2)}{2x_i\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(x_i^2-x_j^2)}$$

et

$$\tilde{l}_i(x) = \frac{\prod_{j=0}^{q}(x-x_j)}{\prod_{j=0}^{q}(-x_i-x_j)}\frac{\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(x+x_j)}{\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(-x_i+x_j)} = \frac{(x-x_i)\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(x^2-x_j^2)}{-2x_i\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(x_i^2-x_j^2)}$$

Ainsi

$$l_i(x) + \tilde{l}_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(x^2-x_j^2)}{\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(x_i^2-x_j^2)}$$

et en particulier $l_i + \tilde{l}_i$ est une fonction paire. Il en est de même pour P.

(i) 0 est élément de la famille :

On rajoute alors un élément supplémentaire à la famille précédente qu'on note $x_{q+1} = 0$. On note l_{q+1} le polynôme de base associé supplémentaire. Par rapport aux expresions précédentes, on doit rajouter $\frac{x}{x_i}$ à l_i et $\frac{x}{-x_i}$ à $\tilde{l}_i$, ce qui donne alors

$$l_i(x) + \tilde{l}_i(x) = \frac{x^2}{x_i^2}\frac{\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(x^2-x_j^2)}{\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(x_i^2-x_j^2)}$$

et $l_i + \tilde{l}_i$ est toujours une fonction paire

De plus

$$l_{q+1}(x) = \frac{\prod_{j=0}^{q}(x-x_j)}{\prod_{j=0}^{q}(-x_j)}\frac{\prod_{j=0}^{q}(x+x_j)}{\prod_{j=0}^{q}(x_j)} = \frac{\prod_{j=0}^{q}(x_j^2-x^2)}{\prod_{j=0}^{q}(x_j^2)}$$

est également une fonction paire.

b) P est un polynôme de degré au plus 3. De plus, il est pair. En écrivant que $P(-x) = P(x)$ avec $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on trouve que P est de la forme $P(x) = bx^2 + d$. On a de plus

$$b\frac{\pi^2}{4} + d = 0$$

et

$$b\frac{\pi^2}{9}+d=\frac{1}{2}$$

ce qui donne immédiatement $b=-\frac{18}{5\pi^2}$ et $d=\frac{9}{10}$.

Exercice GROUPE A

a) Montrer que le polynome d'interpolation de Lagrange associé à une fonction impaire et une famille de points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ symétrique par rapport à l'origine est impair.

b) En déduire le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x)=\sin x$ aux points $(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6},0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$.

Correction

De même que dans l'exercice du groupe B, deux cas sont possibles :

(i) 0 n'est pas élément de la famille : dans ce cas, on a $n=2q+2$ et on peut décomposer la famille de la manière suivante : $(x_i)_{0\leq i\leq q}$ et $(-x_i)_{0\leq i\leq q}$ avec $x_i>0$. On note l_i et $\tilde{l}_i$ les polynômes de base de Lagrange associés. On a alors

$$P(x)=\sum_{i=0}^{q}(f(x_i)l_i(x)+f(-x_i)\tilde{l}_i(x))=\sum_{i=0}^{q}f(x_i)(l_i(x)-\tilde{l}_i(x))$$

En écrivant comme précédemment les expressions de l_i et $\tilde{l}_i$, on a

$$l_i(x)-\tilde{l}_i(x)=\frac{x}{x_i}\frac{\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(x^2-x_j^2)}{\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(x_i^2-x_j^2)}$$

et en particulier $l_i+\tilde{l}_i$ est une fonction impaire. Il en est de même pour P.

(i) 0 est élément de la famille :

On rajoute alors un élément supplémentaire à la famille précédente qu'on note $x_{q+1}=0$. On note l_{q+1} le polynôme de base associé supplémentaire. Par rapport aux expresions précédentes, on doit rajouter $\frac{x}{x_i}$ à l_i et $\frac{x}{-x_i}$ à $\tilde{l}_i$, ce qui donne alors

$$l_i(x)-\tilde{l}_i(x)=\frac{x}{x_i}\frac{\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(x^2-x_j^2)}{\prod_{j\neq i,j=0}^{q}(x_i^2-x_j^2)}$$

et $l_i-\tilde{l}_i$ est toujours une fonction impaire. Il est inutile de calculer l_{q+1} car $f(x_{q+1})=0$.

b) P est un polynôme de degré au plus 4. De plus, il est impair. En écrivant que $P(-x)=-P(x)$ avec $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, on trouve que P est de la forme $P(x)=bx^3+dx$. On a de plus

$$b\frac{\pi^3}{8}+d\frac{\pi}{2}=1$$

et

$$b\frac{\pi^3}{216}+d\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

ce qui donne immédiatement $b=-\frac{9}{2\pi^3}$ et $d=\frac{25}{8\pi}$.