TD 1 : Normes matricielles, rayon spectral, conditionnement

Rappels :
La condition pour que $\|.\|$ soit une norme matricielle est $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Sauf indication contraire, $\|A\|$ va désigner la norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $\|.\|$ sur $\mathbb{C}^n$, définie par :

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

(nM1) $\|A\| \geq \rho(A)$, avec $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$ le rayon spectral de A.

(nM2) $\forall \varepsilon > 0$, il existe une norme subordonnée tq $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

(nM3) $\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$.

(nM4) Si A est normale (AA*=A*A) $\Longrightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$.

(nM5) $\forall$ A et $\forall$ U unitaire (UU*=I) $\Longrightarrow \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|A\|_2$.

(nM6) $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$.

(nM7) $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$.

(nM8) $\lim_{i \to \infty} A^i = 0 \Longleftrightarrow \lim_{i \to \infty} A^i x = 0, \forall x \in \mathbb{C}^n \Longleftrightarrow \rho(A) < 1 \Longleftrightarrow \exists\, \|A\| < 1$

Exercice 1. Démontrer les résultats :
(a) **nM3**
(b) **nM4**
(c) **nM5**
(d) **nM6, nM7**
Montrer aussi que si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| + \delta, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \tag{1}$$

pour $\delta > 0$ donné, alors A est inversible et $\|A^{-1}\|_\infty \leq 1/\delta$. (Une matrice vérifiant la propriété (1) s'appelle une matrice à diagonale strictement dominante.)
Montrer que $|\lambda| \geq \delta$, $\forall\ \lambda$ valeur propre de A.
(e) **nM8**

Exercice 2. Pour tout réel α, on note A_α la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de la matrice A_α ?
2. Pour quelles valeurs de α, la matrice A_α est elle inversible ?
3. Calculer les normes $\|A_\alpha\|_1$, $\|A_\alpha\|_2$ et $\|A_\alpha\|_\infty$.

Exercice 3. On considère la norme matricielle $||A||_p$, pour $p = 1, 2, \ldots \infty$. Le conditionnement de la matrice A (supposée inversible) associé à cette norme est défini par :

$$\mathrm{cond}_p(A) = ||A||_p.||A^{-1}||_p.$$

Montrer que si A est symétrique et inversible alors,

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max_{i=1,n} |\lambda_i|}{\min_{i=1,n} |\lambda_i|}.$$

Soient A une matrice inversible, b, Δb, x et Δx des vecteurs tels que

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A(x+\Delta x) &= b+\Delta b. \end{aligned}$$

Montrer que

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{||\Delta b||}{||b||},$$

pour n'importe quelle norme matricielle.

Exercice 4. Soient A et ΔA des matrices, b, x et Δx des vecteurs tels que

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ (A+\Delta A)(x+\Delta x) &= b. \end{aligned}$$

Montrer que

$$\frac{||\Delta x||}{||x+\Delta x||} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{||\Delta A||}{||A||}.$$