EPF 3 Travaux dirigés
Mathématiques appliquées
2007 – 2008

TD 2 : Systèmes linéaires - méthodes directes

Rappels. Factorisations utilisées pour la résolution directe du système linéaire $Ax = b$:

- (factorisation LU = méthode de Gauss sans pivot) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible $\Longrightarrow A = LU$ avec L matrice triangulaire inférieure, U triangulaire supérieure et $diag(L) = 1$.
- (factorisation de Cholesky) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, définie positive $\Longrightarrow A = LL^t$ avec L matrice triangulaire inférieure.

Exercice 1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -6 & -10 & -13 \\ -9 & -22 & -36 \end{pmatrix}$$

1. Trouver les matrices élémentaires intermédiaires E_1, E_2 de la factorisation de Gauss (i.e. telles que E_2E_1A soit triangulaire supérieure).
2. Calculer le produit E_2E_1A.

Exercice 2. On considère la matrice A et le vecteur b

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver les matrices intermédiaires de la factorisation de Gauss et calculer la matrice triangulaire.
2. Résoudre Ax=b par la méthode de Gauss.

Exercice 3. Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Faire la décomposition $A = LU$, où L a ses éléments diagonaux égaux à 1.
2. Résoudre les systèmes linéaires $Ax_i = e_i$, $(1 \leq i \leq 4)$ où e_i est i^{eme} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. (les x_i sont les colonnes de A^{-1})

Exercice 4. Pour N entier, on définit la matrice tridiagonale d'ordre N :

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la factorisation LU de la matrice A_4.
2. Calculer la factorisation LU de la matrice A_N.

Exercice 5. Effectuer la factorisation de Cholesky de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 42 & 12 \\ 3 & 7 & 12 & 47 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Supposons que les nombres sont représentés en virgule flottante dans une base décimale avec 3 chiffres significatifs et que le résultat des opérations est arrondi à 3 chiffres significatifs. Soit le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss en choisissant comme premier pivot 10^{-4}.
2. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss en choisissant comme ligne pivot à la première étape, la deuxième ligne.
3. Conclure.