Adel Blouza et Laurent Dumas

TD n° 3 : Systèmes linéaires - méthodes itératives

Exercice 1 Soit la méthode itérative

$$Mx_{n+1} = Nx_n + c \qquad \text{où M est une matrice inversible.}$$

Si la matrice d'itération $M^{-1}N$ a le rayon spectral nul, montrer qu'il existe un entier p tel que

$$(M^{-1}N)^p = 0.$$

En déduire qu'il s'agit d'une méthode directe (*i.e.* la solution est obtenue en un nombre fini d'itérations).

Exercice 2 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ donné, on considère la matrice A_α

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Ecrire la matrice $\mathcal{J}$ de la méthode itérative de Jacobi. Pour quelles valeurs de α cette méthode converge-t-elle ?
2. Ecrire la matrice $\mathcal{L}_1$ de la méthode itérative de Gauss-Seidel. Pour quelles valeurs de α la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle ?

Exercice 3 Pour résoudre le système $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

on décompose la matrice A en $A = B - I$ et on construit la suite de vecteurs définie par

$$x_{k+1} = Bx_k - b, \qquad k \geq 0.$$

Le vecteur initial $x_0 = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$ est choisi proche de la solution exacte $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($\varepsilon > 0$ est 'petit'). Calculer x_k en fonction de ε. La suite x_k converge-t-elle ? Ce résultat etait il prévisible ?

Exercice 4 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, montrer que la méthode de Jacobi appliquée à la matrice A converge.

Exercice 5 Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale strictement dominante,

1. Démontrer que la méthode de Jacobi converge.
2. Démontrer que la méthode de Gauss-Seidel converge.

Exercice 6 Le but de cet exercice est de montrer qu'on ne peut rien dire en général de la comparaison de deux méthodes itératives.

1. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $\varrho(\mathcal{J}) < 1 < \varrho(\mathcal{L}_1)$.
2. Pour $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, montrer que $\varrho(\mathcal{L}_1) < 1 < \varrho(\mathcal{J})$.

Exercice 7 1. Soit A une matrice symétrique, définie positive. Montrer que résoudre $Ax = b$ revient à calculer $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\lambda_i} v_i$ où, pour $i = 1, n$, λ_i sont les valeurs propres de A, v_i sont les vecteurs propres associés et c_i sont des coefficients réels.

2. Considérons en suite le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la question précédente, expliquer pourquoi, quand $b = (2001, 2001)^t$, une petite perturbation $\delta(b) = (1, 0)^t$ sur b porte à une grande perturbation sur x, et quand $b = (1, -1)^t$, une petite perturbation $\delta(x) = (0.001, 0)^t$ sur x conduit à une grande perturbation sur b.

Exercice 8 Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible pour laquelle la méthode de Jacobi est définie. Pour résoudre le système $Ax = b$, on considère la méthode itérative suivante, dite méthode de Jacobi relaxée (ω est un paramètre réel non nul) :

$$\frac{D}{\omega} x_{k+1} = \Big(\frac{1-\omega}{\omega} D + E + F \Big) x_k + b \qquad\qquad k \geq 1$$

$x_0 \in \mathbb{R}^N$ étant choisi. On note $\mathcal{J}_\omega$ la matrice associée à cette méthode. On suppose la matrice A symétrique, définie positive et tridiagonale.

1. Établir une relation entre les valeurs propres de $\mathcal{J}_\omega$ et les valeurs propres de $\mathcal{J}$.
2. Montrer que la méthode de Jacobi relaxée converge si et seulement si ω appartient à un intervalle I que l'on déterminera.
3. Trouver la valeur $\bar{\omega}$ assurant la convergence la plus rapide, *i.e.* telle que

$$\varrho(\mathcal{J}_{\bar{\omega}}) = \inf_{\omega \in I} \varrho(\mathcal{J}_\omega).$$

Calculer $\varrho(\mathcal{J}_{\bar{\omega}})$.
