EPF 2007-2008, 3ème année,
TD5 Mathématiques Appliquées:
Problèmes aux limites pour les EDO

Dans cet exercice, on étudie l'équation différentielle avec conditions aux limites suivante:

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où $c \in \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}_+)$ et $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$.

A l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué au problème de Cauchy paramétré par $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} -u_\lambda''(x) + c(x)u_\lambda(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u_\lambda(0) = 0 \\ u_\lambda'(0) = \lambda \end{cases}$$

on montre qu'il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbf{R})$ de (1) (méthode de tir) telle que que si $f \geq 0$, alors $u \geq 0$ (principe du maximum).

On cherche à présent à approcher u à l'aide d'une méthode de type différences finies. Dans toute la suite, on note $h = \dfrac{1}{N+1}$ où $N \in \mathbf{N}$.

---

a) Montrer tout d'abord que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^4([0,1], \mathbf{R})$, il existe $C \geq 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbf{N},\ \forall i \in \{1, ..., N\},\ \left|u''(ih) - \frac{1}{h^2}(u((i+1)h) + u((i-1)h) - 2u(ih))\right| \leq Ch^2$$

b) On propose pour approcher u le schéma consistant à construire pour tout $N \in \mathbf{N}$ la famille $(u_i)_{0 \leq i \leq N+1}$ vérifiant

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{h^2}(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) + c(ih)u_i = f(ih) \quad (1 \leq i \leq N) \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Montrer que le vecteur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq N}$ est caractérisé par une relation du type $AU = F$ avec $F \in \mathbf{R}^N$ et $A \in SDP_N(\mathbf{R})$ à déterminer.

c) On considère la famille des matrices $B \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ vérifiant les trois propriétés suivantes (M matrices):

$$\begin{cases} B_{i,i} > 0 \\ B_{i,j} \leq 0 \quad (i \neq j) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} B_{i,j} > 0 \quad (1 \leq i \leq N) \end{cases}$$

Montrer que $B \in GL_N(\mathbf{R})$ et que si $F \in \mathbf{R}^N$ a des coordonnées toutes positives, il en est de même pour $B^{-1}F$. En déduire que tous les coefficients de B^{-1} sont positifs.

d) En utilisant le fait que pour tout $\epsilon > 0$, $A + \epsilon I$ est une M-matrice, montrer que tous les coefficients de A^{-1} sont positifs (principe du maximum discret)

e) En utilisant le vecteur $V = (v(h), ...v(Nh))$ avec $v(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$, montrer que

$$|||A^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{8}$$

f) Montrer la convergence d'ordre 2 du schéma d'approximation (2) de (1) pour des données c et f de classe $\mathcal{C}^2$, à savoir:

$$\exists C \geq 0, \quad \forall N \in \mathbf{N}, \quad \max_{0 \leq i \leq N+1} (|u_i - u(ih)|) \leq C h^2$$