

## Interrogation du 4 décembre 2007, groupe C

---

### Question de cours

Donner la définition d'une norme subordonnée. Rappeler la définition du rayon spectral d'une matrice et donner une formule explicite de la norme subordonnée  $\|A\|_2$  en fonction du rayon spectral.

### Exercice

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

1) Rappeler la méthode itérative de Jacobi et expliquer pourquoi elle a un sens pour ce type de matrice.

2) Soit  $(\lambda, x)$  un élément propre de la matrice de Jacobi. Montrer que

$$-\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j = \lambda a_{ii} x_i, \quad \forall i$$

3) Montre que

$$|\lambda| |a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

En déduire la convergence de la méthode de Jacobi.