

Interrogation du 4 décembre 2007, groupe D

Question de cours

Donner la définition d'une norme matricielle. En donner un exemple.

Exercice Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que

$$A = (1 + \alpha)P - (N + \alpha P)$$

avec $P^{-1}N$ de valeurs propres $1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

1. On considère la méthode itérative suivante :

$$(1 + \alpha)Pa_{k+1} = (N + \alpha P)a_k + b, \quad k \geq 0,$$

pour approcher la solution du système $Aa = b$.

Pour $\alpha \neq -1$, écrire la matrice K associée à cette méthode.

2. Soit μ une valeur propre de K . Montrer que

$$\mu = \frac{\lambda + \alpha}{1 + \alpha},$$

avec λ une valeur propre de $P^{-1}N$.

3. Pour $\alpha > -\frac{1+\lambda_n}{2}$, montrer la convergence de la méthode.