EPF 3ème année Sceaux, le 14 Janvier 2008

Mathématiques Appliquées (M. Blouza et Dumas)

PARTIEL MATHEMATIQUES APPLIQUEES

(2heures, aucun document, calculatrice EPF autorisée)

PARTIE A Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la factorisation LU de la matrice A.
2. Indiquer pourquoi la matrice A ne possède pas de factorisation de Cholesky.
3. Calculer $|||U|||_1$ puis $|||U^{-1}|||_1$ et enfin $\text{cond}_1(U)$.
4. Calculer de même $\text{cond}_1(A)$. Que peut-on en conclure ?

PARTIE B Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 2 & -1 \\ 0 & 0 & . & . & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire un petit script Scilab permettant de définir la matrice A pour une valeur de n quelconque.
2. Soit v un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Montrer que λ est réel et que les composantes v_i de v vérifient la relation :

$$v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0, \quad 1 \le i \le n \tag{1}$$

en supposant $v_0 = v_{n+1} = 0$.

On rappelle que les solutions générales (complexes) des suites récurrentes du type $u_{i+2} + au_{i+1} + bu_i = 0$ sont égales à

$$u_i = \alpha r_1^i + \beta r_2^i, \quad \textit{si } r_{1,2} \quad \textit{racines } \underline{\textit{distinctes}} \textit{ de} \quad r^2 + ar + b = 0$$

ou

$$u_i = (\alpha + \beta i) r^i \quad \textit{si } r \quad \textit{racine } \underline{\textit{double}} \textit{ de} \quad r^2 + ar + b = 0$$

3. Montrer que 0 et 4 ne sont pas valeurs propres de A.
4. On suppose que λ est une valeur propre de A différente de 0 et 4. Montrer que les racines distinctes r_1 et r_2 du polynôme $r^2 - (2-\lambda)r + 1 = 0$ vérifient $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$.
5. En calculant $r_1 r_2$ et $r_1 + r_2$, montrer que les valeurs propres de A sont au nombre de n et peuvent s'écrire :

$$\lambda_k = 2 - 2cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 4sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$$

avec $k \in \{1, ..., n\}$.

6. En déduire que A est une matrice définie positive.
7. Pour chaque λ_k, déterminer un vecteur propre associé $v \in \mathbb{R}^n$.
8. On cherche à résoudre le système $Au = b$ par la méthode de Jacobi. Calculer $\rho(J)$ et en déduire que la méthode converge. Sans faire de calculs supplémentaires, que peut-on dire de la méthode de Gauss Seidel ?
9. Ecrire un petit programme Scilab permettant de calculer les 10 premieres iterations de la méthode de Jacobi avec la matrice A et un second membre b donné.