EPF
Mathématiques appliquées
2004–2005

Intégration numérique

1. (**Méthode des rectangles**)
Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $h > 0$. On approche f par le polynôme de Lagrange P de degré 0, au point $x = 0$.
a) Calculer $P(x)$ et majorer l'erreur $|f(x) - P(x)|$ sur $[0, h]$.
b) On pose $I(f) = hf(0)$, montrer que $I(P) = \displaystyle\int_0^h P(x)dx$ et majorer l'erreur

$$R(f) = \int_0^h f(x)dx - I(f).$$

c) Méthode composée : On pose pour $a < b$ et $n \geq 1$ $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$, $k = 0, .., n$.

$$I_n(f) = h\left(f(x_0) + f(x_1) + .. + f(x_{n-1})\right).$$

Majorer $R_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx - I_n(f)$.
d) Estimer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx - I_{10}(\frac{1}{x})$.

2. (**Méthode du point au milieu**)
Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $h > 0$. On approche f par le polynôme d'Hermite P, au point $x = \frac{h}{2}$ tel que $P(\frac{h}{2}) = f(\frac{h}{2}), P'(\frac{h}{2}) = f'(\frac{h}{2})$.
a) Calculer $P(x)$ et majorer l'erreur $|f(x) - P(x)|$ sur $[0, h]$.
b) On pose $I(f) = hf(\frac{h}{2})$, montrer que $I(P) = \displaystyle\int_0^h P(x)dx$ et majorer l'erreur

$$R(f) = \int_0^h f(x)dx - I(f).$$

c) Méthode composée : On pose pour $a < b$ et $n \geq 1$ $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$, $k = 0, .., 1$.

$$I_n(f) = h\left(f(\frac{x_0 + x_1}{2}) + .. + f(\frac{x_{n-1} + x_n}{2})\right).$$

Majorer $R_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx - I_n(f)$.
d) Estimer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx - I_{10}(\frac{1}{x})$.

3. (**Méthode des trapèzes**)
Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $h > 0$. On approche f par le polynôme de Lagrange P de degré 1 au points $x = 0$ et $x = h$.
a) Calculer $P(x)$ et majorer l'erreur $|f(x) - P(x)|$ sur $[0, h]$.
b) On pose $I(f) = h\left(\dfrac{f(0) + f(h)}{2}\right)$, montrer que $I(P) = \displaystyle\int_0^h P(x)dx$ et majorer l'erreur

$$R(f) = \int_0^h f(x)dx - I(f).$$

c) Méthode composée : On pose pour $a < b$ et $n \geq 1$ $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$, $k = 0, .., n$.

$$\begin{aligned} I_n(f) &= h\left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + .. + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\right). \\ &= h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + .. + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right) \end{aligned}$$

Majorer $R_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx - I_n(f)$.
d) Estimer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx - I_{10}(\frac{1}{x})$.

4. (**Méthode de Simpson**)
Soit $f \in C^4(\mathbb{R})$ et $h > 0$. On approche f par le polynôme d'Hermite P de degré 3 au points $x = 0$,$x = h$ et $x = -1$, vérifiant :

$$\begin{gathered} P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \\ f(0) = P(0), f'(0) = P'(0) \\ f(1) = P(1), f(-1) = P(-1). \end{gathered}$$

a) Calculer a, b, c, d en fonction de $f(0), f'(0), f(1), f(-1)$ et majorer l'erreur $|f(x) - P(x)|$ sur $[-1, 1]$.
b) On pose $I(f) = \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)$, calculer α, β, γ pour que la formule de quadrature soit exacte pour $f = 1, X, X^2$. Est-elle exacte pour $f = X^3$?, $f = X^4$?. Montrer que $I(P) = \displaystyle\int_{-1}^1 P(x)dx$ et majorer l'erreur

$$R(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx - I(f).$$

Calculer $R(X^4)$ et montrer que la constante $\frac{1}{90}$ est optimale.
c) Soit $g \in C^4(\mathbb{R}^N)$, on pose $f(x) = g(h.x)$. Estimer l'erreur

$$\int_{-h}^h g(x)dx - 2h\left(\frac{g(-h) + 4g(0) + g(h)}{6}\right).$$

d) Méthode composée : On pose pour $a < b$ et $n \geq 1$ $x_k = a + kh$, $k = 0, .., n$, $h = \frac{b-a}{2n}$

$$I_n(f) \;=\; 2h \left(\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + .. + \frac{f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})}{6} \right).$$

Majorer $R_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx - I_n(f)$.

e) Estimer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx - I_{10}(\frac{1}{x})$.

5. Soit $f \in C^4(\mathbb{R})$, $a < b$ et $h = \frac{b-a}{2n}$. On pose $x_k = a + kh, k = 0, 1, .., 2n$ et $y_k = f(x_k)$.
On suppose que $|f'|, |f"|, |f^{(3)}| \leq 1$ et $b - a = 1$.
On suppose de plus qu'une addition ou soustraction nécessite $10^{-6}s$ de temps de machine et qu'une multiplication ou division en nécessite $10^{-5}s$.
Calculer les temps mis et les erreurs pour $n = 100$ dans les méthodes des rectangles, des trapèzes et de Simpson. Conclure.