PARTIEL MATHEMATIQUES APPLIQUEES

EPF, 2eme ANNEE, 2005

(2 heures, calculatrice EPF autorisée)

Exercice 1 Soit f une fonction de classe C^1 sur un voisinage fermé I de la racine a de l'équation $f(x) = 0$. On cherche à approcher a par les valeurs successives $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, avec x_0 choisi dans I et

$$\varphi(x) = x - \frac{2}{(m_1 + M_1)} f(x)$$

où $m_1 = \inf\limits_{x \in I} f'(x)$ et $M_1 = \sup\limits_{x \in I} f'(x)$

a) En supposant $m_1 > 0$, montrer que la fonction φ est strictement contractante à savoir $\forall x \in I, \quad |\varphi'(x)| < 1$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers a et donner une majoration de $|x_n - a|$.

b) Comparer, sur les quatre premiers termes, la méthode précédente avec la méthode de Newton pour approcher $\sqrt{2}$ en prenant $x_0 = 2$ et $I = [1, 2]$.

Exercice 2 Soit $\epsilon \in]0, 1[$ et $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$. On note $a = f(0)$ et $b = f(1)$.

a) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange P_ϵ de f relativement aux points 0, ϵ et 1.

b) Soit $x \in [0, 1]$ fixé. Montrer que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} P_\epsilon(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a.$$

c) Vérifier que le polynôme $P(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a$ ainsi obtenu est l'unique polynôme de degré ≤ 2 tel que $P(0) = a$, $P'(0) = f'(0)$ et $P(1) = b$.

Exercice 3 L'évolution d'une population composée de proies (fonction u) et de prédateurs (fonction v) est décrite par le système d'équations différentielles linéaires suivant:

$$\begin{cases} u'(t) = 4u(t) - 2v(t) \\ v'(t) = v(t) + u(t) \end{cases}$$

a) Montrer que u et v sont solution d'une même équation différentielle linéaire du second ordre que l'on déterminera. En supposant $u(0) = u_0$ et $v(0) = v_0$, donner l'expression de u et v.

b) On suppose $u_0 > v_0$. Montrer que dans ce cas,

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \lim_{t \to +\infty} v(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{v(t)} = 2$$

Interpréter le modèle proies-prédateurs dans ce cas. Que se passe t-il lorsque $v_0 > u_0$, respectivement $v_0 = u_0$?

c) Afin d'obtenir un modèle plus réaliste, on remplace le système initial par le système

$$\begin{cases} u'(t) = 4u(t)(1-u(t)) - 2v(t) \\ v'(t) = v(t)(2-v(t)) + u(t) \end{cases}$$

Ecrire un algorithme sous forme informatique permettant d'approcher les solutions de ce système entre $t = 0$ et $t = 10$ à l'aide de la méthode d'Euler explicite, en laissant libre choix à l'utilisateur du pas et des données initiales.