LM206 : Initiation à `Scilab`, TP6

L'objectif de cette séance est de s'intéresser à la programmation linéaire avec Scilab. En voici un exemple simple : un boulanger fabrique de la brioche et du pain viennois. Il dispose pour cela de farine en quantité a (exprimée en kg par exemple), de beurre en quantité b et de sucre en quantité c. Le boulanger vend sa brioche à un prix p (exprimé en *euros* par exemple) et son pain viennois à un prix q, que l'on supposera tous deux indépendants de la quantité vendue. La production est supposée linéaire, c'est-à-dire que les quantités de matières premières utilisées dépendent linéairement du nombre de pains fabriqués ; on supposera que x unités de brioche et y unités de pain viennois nécessitent $u = 5x + 4y$ unités de farine, $v = x+2y$ unités de beurre, et $w = 3x+2y$ unités de sucre. On définit les vecteur $\vec{x}$, $\vec{u}$, $\vec{a}$ et $\vec{p}$ représentant respectivement la quantité de pain produite, la quantité de matière première utilisée, le stock de matière première disponible et les prix de vente :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

<u>Contraintes.</u> Montrer que la limitation des ressources se traduit par :

$$5x + 4y \leq a, \quad x + 2y \leq b, \quad 3x + 2y \leq c. \tag{1}$$

Écrire les contraintes (1) sous forme matricielle

$$M\vec{x} \leq \vec{a}. \tag{2}$$

<u>Optimisation.</u> Les ventes de x unités de brioche et y unités de pain viennois rapportent au boulanger $C(\vec{x}) = px + qy$. On notera que

$$C(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle = \vec{p}^T \vec{x}. \tag{3}$$

Notre boulanger veut maximiser son chiffre d'affaire, tout en étant contraint de n'utiliser pour sa production que ce qu'il a en stock. On suppose qu'il vend tout ce qu'il produit. D'un point de vue mathématique, le problème consiste à maximiser la fonction $C(\vec{x})$ sur l'ensemble Ω des vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ dont toutes les composantes sont positives et qui vérifient l'inégalité (2). Comme application numérique, on prendra $p = 40$, $q = 50$, $a = 80$, $b = 24$, et $c = 36$.

Exercice 1 Exécuter les instructions suivantes de `Scilab` et expliquer leur utilité dans la détermination du domaine Ω.

```
p=40; q=50; a=80; b=24; c=36;
x=linspace(0,50,100)'; z1=(a-5*x)/4;z2=(b-x)/2;z3=(c-3*x)/2;
plot2d(x,[z1 z2 z3]);
xbasc();x=linspace(0,20,100)'; z1=(a-5*x)/4;z2=(b-x)/2;z3=(c-3*x)/2;
plot2d(x,[z1 z2 z3]);xgrid();
```

Exécuter les instructions suivantes

```
for r=100:50:800, plot2d(x,[z1 z2 z3 (r-p*x)/q]), end;xgrid()
```

et en déduire que la solution optimale de notre problème est (à peu près) $x = 6, y = 9$. En déduire que le chiffre d'affaire du boulanger est d'environ 700. Pouvez-vous calculer plus précisément le chiffre d'affaire ? Il n'est pas demandé de faire des calculs exacts (et simples !) à la main, mais de se servir uniquement des graphiques obtenus par `Scilab`.

Bien entendu, la démarche précédente est propre à la dimension deux (il y a deux inconnues (x et y) dans le problème) et on imagine mal l'appliquer à un problème à mille inconnues. Il existe cependant des algorithmes efficaces pour résoudre les problèmes de la programmation linéaire, par exemple l'algorithme de la fonction `linpro` de `Scilab`.

Exercice 2 Retrouver les résultats de l'exercice précédent en utilisant la fonction `linpro`. Utiliser la commande `printf` pour afficher la solution optimale, le chiffre d'affaires, la quantité de matière première disponible, la quantité de matière première utilisée, la quantité de matière première restante, ...

Exercice 3 Modifier le problème précédent en supposant que le boulanger produit deux autres variétés de pain de plus, vendues respectivement aux prix r et s. La production de z unités du premier pain et de t unités du second nécessite l'utilisation de $u = 5x + 4y + 3z + t$ unités de farine, $v = x + 2y + z + 2t$ unités de beurre, et $w = 3x + 2y + z + 3t$ unités de sucre. Faire varier r et s et commenter les résultats obtenus. On prendra en particulier $(r, s) = (0, 0)$, $(r, s) = (55, 45)$ et $(r, s) = (20, 45)$.