Projet n°2 : Modèles de dynamique des populations

N.B. On s'attachera à présenter les résultats de manière conviviale et compréhensible pour un non initié à Scilab. On soignera en particulier les interfaces d'entrée et de sortie ainsi que les figures.

1 Le modèle de croissance logistique

En 1836, Verhulst propose l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante pour modéliser l'évolution de la densité $N(t)$ d'une population donnée en fonction du temps :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K}), \quad t \geq 0 \tag{1}$$

où r et K désignent deux constantes positives. Ce modèle présente deux points d'équilibre, c'est à dire deux solutions constantes vérifiant l'équation (1), $N = 0$ et $N = K$. La nature de ces deux points est très différente : le premier est dit instable, à savoir qu'une légère perturbation de la donnée initiale autour du point d'équilibre va modifier totalement la solution alors que le second est au contraire stable, le système dans ce cas revenant vers sa position d'équilibre. Dans ce modèle, la constante r mesure la vitesse de retour à l'équilibre.

1. Ecrire un programme Scilab utilisant l'instruction `ode` permettant de resoudre l'équation (1) pour les valeurs des paramètres $r = 1$ et $K = 3$ et pour une donnée initiale $N(0)$ quelconque.

2. Résoudre l'EDO (1) de manière exacte en divisant celle-ci par N^2 puis en faisant un changement de fonction inconnue. Comparer graphiquement la solution exacte avec la solution obtenue par Scilab.

2 Le modèle du ver du bourgeon de l'épinette

Les vers du bourgeon de l'épinette sont un fléau national pour le Canada. Un modèle d'évolution a été proposé par Ludwig-Jones et Holling en 1978. L'équation différentielle décrivant la population du ver est la suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K}) - p(N(t)), \quad t \geq 0 \tag{2}$$

où $p(N)$ représente un terme de prédation lié à la densité d'oiseaux :

$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + B^2}$$

où r, K, A, et B dont les 4 constantes, toutes positives, du modèle.

Afin de réduire le nombre de paramètres, on effectue les changements suivants :

$$u = \frac{N}{A}, \quad R = \frac{Ar}{B}, \quad q = \frac{K}{A}, \quad \tau = \frac{Bt}{A}$$

permettant de se ramener à l'équation différentielle :

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} = Ru(\tau)(1 - \frac{u(\tau)}{q}) - \frac{u^2(\tau)}{1 + u^2(\tau)} \tag{3}$$

Afin de rechercher les solutions constantes de (3), on est ramené à résoudre l'équation non linéaire suivante d'inconnue u :

$$Ru(1 - \frac{u}{q}) - \frac{u^2}{1+u^2} = 0 \tag{4}$$

En fonction des valeurs de R et q, on montre que celle-ci possède 1, 2 ou 3 solutions strictement positives.

1. Utiliser l'instruction `ode` de Scilab afin de représenter de manière approchée la solution de l'équation (3) pour les paramètres $R = 0.4$ et $q = 10$ et les 4 valeurs initiales respectives $u_0 = 0.1, 2, 5, 10$. Qu'observe-t-on ?

2. Utiliser l'instruction `fsolve` de Scilab et déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (4) avec $R = 0.4$ et $q = 10$.

3. Déterminer en fonction des résultats précédents, l'ensemble des points d'équilibre de l'équation (3) pour les paramètres $R = 0.4$ et $q = 10$ ainsi que leur stabilité.

4. Modifier les valeurs de R et q de telle sorte à observer un comportement différent du système (un seul point d'équilibre).