Projet n°3 : le modèle de la chainette

N.B. On s'attachera à présenter les résultats de manière conviviale et compréhensible pour un non initié à Scilab. On soignera en particulier les interfaces d'entrée et de sortie ainsi que les figures.

1 Un premier problème aux limites

On s'intéresse ici à un exemple simple d'équation différentielle ordianaire (EDO) avec données au bord du domaine :

$$\begin{cases} u''(t) = f(t), \quad t \in]0,1[\\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Ici , f est une application donnée, continue.

Une méthode générale pour résoudre cette équation, appelée méthode de tir, consiste à résoudre le système paramétré par le réel a

$$\begin{cases} u_a''(t) = f(t), \quad t \in]0,1[\\ u_a(0) = 0 \\ u_a'(0) = a \end{cases} \tag{2}$$

On peut alors définir une fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \Phi(a) = u_a(1)$$

Le problème se ramène donc à trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(a) = 0$.

On suppose ici que $f(t) = cos(2\pi t)$.

1. Ecrire une fonction Scilab utilisant l'instruction `ode` permettant de calculer une solution de (2) pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2. Ecrire un programme Scilab utilisant la méthode de la dichotomie, permettant de déterminer la valeur de a telle que $\Phi(a) = 0$.

On rappelle que la méthode de dichotomie pour rechercher la valeur de a telle que $\Phi(a) = 0$ consiste à encadrer celle-ci par deux valeurs a_1 et b_1 telles que $\Phi(a_1)\Phi(b_1) < 0$, puis à couper l'intervalle $[a_1, b_1]$ au milieu c_1 et à regarder de quel coté se situe a en fonction du signe de $\Phi(c_1)$, puis à répéter cette opération un grand nombre de fois.

Comparer le résultat obtenu avec celui donné par l'instruction `fsolve` de Scilab.

3. Déterminer la solution exacte de (1) par double intégration. Comparer graphiquement la solution exacte avec la solution obtenue par Scilab.

2 Le modèle de la chainette

On s'intéresse maintenant au système

$$\left\{ \begin{array}{c} u''(t) - \sqrt{1+u'^2(t)} = 0, \quad t \in]0,1[\\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{array} \right. \tag{3}$$

Cette équation modélise la configuration d'un fil soumis à la pesanteur et tenue aux deux extrémités. Adapter l'étude numérique précédente (points 1 et 2) pour déterminer la solution u de (3). Représenter graphiquement la position de la chainette.