# LM206 : Initiation à `Scilab`, TP 6

L'objectif de cette séance est de s'intéresser à la programmation linéaire avec Scilab. En voici un exemple simple : un boulanger fabrique de la brioche et du pain viennois. Il dispose pour cela de farine en quantité $a$ (exprimée en $kg$ par exemple), de beurre en quantité $b$ et de sucre en quantité $c$. Le boulanger vend sa brioche à un prix $p$ (exprimé en *euros* par exemple) et son pain viennois à un prix $q$, que l'on supposera tous deux indépendants de la quantité vendue. La production est supposée linéaire, c'est-à-dire que les quantités de matières premières utilisées dépendent linéairement du nombre de pains fabriqués ; on supposera que $x$ unités de brioche et $y$ unités de pain viennois nécessitent $u = 5x + 4y$ unités de farine, $v = x + 2y$ unités de beurre, et $w = 3x + 2y$ unités de sucre. On définit les vecteur $\vec{x}$, $\vec{u}$, $\vec{a}$ et $\vec{p}$ représentant respectivement la quantité de pain produite, la quantité de matière première utilisée, le stock de matière première disponible et les prix de vente :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

<u>Contraintes.</u> Montrer que la limitation des ressources se traduit par :

$$5x + 4y \le a, \quad x + 2y \le b, \quad 3x + 2y \le c. \tag{1}$$

Écrire les contraintes (1) sous forme matricielle

$$M\vec{x} \le \vec{a}. \tag{2}$$

<u>Optimisation.</u> Les ventes de $x$ unités de brioche et $y$ unités de pain viennois rapportent au boulanger $C(\vec{x}) = px + qy$. On notera que

$$C(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle = \vec{p}^T \vec{x}. \tag{3}$$

Notre boulanger veut maximiser son chiffre d'affaire, tout en étant contraint de n'utiliser pour sa production que ce qu'il a en stock. On suppose qu'il vend tout ce qu'il produit. D'un point de vue mathématique, le problème consiste à maximiser la fonction $C(\vec{x})$ sur l'ensemble $\Omega$ des vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ dont toutes les composantes sont positives et qui vérifient l'inégalité (2). Comme application numérique, on prendra $p = 40$, $q = 50$, $a = 80$, $b = 24$, et $c = 36$.

**Exercice 1** En utilisant la représentation graphique avec Scilab (en mettant $x$ en abscisse et $y$ en ordonnée), montrer que la solution optimale de notre problème est (à peu près) $x = 6, y = 9$.

En déduire que le chiffre d'affaire du boulanger est d'environ 700. Pouvez-vous calculer plus précisément le chiffre d'affaire ? Il n'est pas demandé de faire des calculs exacts (et simples !) à la main, mais de se servir uniquement des graphiques obtenus par `Scilab`.

Bien entendu, la démarche précédente est propre à la dimension deux (il y a deux inconnues ($x$ et $y$) dans le problème) et on imagine mal l'appliquer à un problème à mille inconnues. Il existe cependant des algorithmes efficaces pour résoudre les problèmes de la programmation linéaire, par exemple l'algorithme de la fonction `linpro` de `Scilab`.

**Exercice 2** Retrouver les résultats de l'exercice précédent en utilisant la fonction `linpro`. Utiliser la commande `printf` pour afficher la solution optimale, le chiffre d'affaires, la quantité de matière première disponible, la quantité de matière première utilisée, la quantité de matière première restante, ...

**Exercice 3** Modifier le problème précédent en supposant que le boulanger produit deux autres variétés de pain de plus, vendues respectivement aux prix $r$ et $s$. La production de $z$ unités du premier pain et de $t$ unités du second nécessite l'utilisation de $u = 5x + 4y + 3z + t$ unités de farine, $v = x + 2y + z + 2t$ unités de beurre, et $w = 3x + 2y + z + 3t$ unités de sucre. Faire varier $r$ et $s$ et commenter les résultats obtenus. On prendra en particulier $(r, s) = (0, 0)$, $(r, s) = (55, 45)$ et $(r, s) = (20, 45)$.