

# Initiation à Scilab

## 5 Programmation linéaire

Voici un exemple simple illustrant ce qu'est la programmation linéaire. Un boulanger fabrique de la brioche et du pain viennois. Il dispose pour cela de farine en quantité  $a$ , de beurre en quantité  $b$  et de sucre en quantité  $c$ . Le boulanger vend sa brioche à un prix  $p$  et son pain viennois à un prix  $q$ , que l'on supposera tous deux indépendants de la quantité vendue. La production est supposée linéaire, c'est-à-dire que les quantités de matières premières utilisées dépendent linéairement du nombre de pains fabriqués; on supposera que  $x$  unités de brioche et  $y$  unités de pain viennois nécessitent  $u = 5x + 4y$  unités de farine,  $v = x + 2y$  unités de beurre, et  $w = 3x + 2y$  unités de sucre. On définit les vecteur  $\vec{x}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{a}$  et  $\vec{p}$  représentant respectivement la quantité de pain produite, la quantité de matière première utilisée, le stock de matière première disponible et les prix de vente :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Contraintes. Montrer que la limitation des ressources se traduit par :

$$5x + 4y \leq a, \quad x + 2y \leq b, \quad 3x + 2y \leq c.$$

Écrire ces contraintes sous forme matricielle

$$M\vec{x} \leq \vec{a}. \tag{1}$$

Optimisation. Les ventes de  $x$  unités de brioche et  $y$  unités de pain viennois rapportent au boulanger  $C(\vec{x}) = px + qy$ . On notera que

$$C(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle = \vec{p}^T \vec{x}. \tag{2}$$

Notre boulanger veut maximiser son chiffre d'affaire, tout en étant contraint de n'utiliser pour sa production que ce qu'il a en stock. On suppose qu'il vend tout ce qu'il produit. D'un point de vue mathématique, le problème consiste à maximiser la fonction  $C(\vec{x})$  sur l'ensemble  $\Omega$  des vecteurs  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  dont toutes les composantes sont positives et qui vérifient l'inégalité (1). Comme application numérique, on prendra  $p = 40$ ,  $q = 50$ ,  $a = 80$ ,  $b = 24$ , et  $c = 36$ .

**Exercice 5.1** Exécuter les instructions suivantes de Scilab et expliquer leur utilité dans la détermination du domaine  $\Omega$ .

```
p=40; q=50; a=80; b=24; c=36;
x=linspace(0,50,100)'; z1=(a-5*x)/4; z2=(b-x)/2; z3=(c-3*x)/2;
plot2d(x, [z1 z2 z3]);
xbasc(); x=linspace(0,20,100)'; z1=(a-5*x)/4; z2=(b-x)/2; z3=(c-3*x)/2;
plot2d(x, [z1 z2 z3]); xgrid();
```

Exécuter les instructions suivantes

```
for r=100:50:800, plot2d(x, [z1 z2 z3 (r-p*x)/q]), end; xgrid();
```

et en déduire que la solution optimale de notre problème est (à peu près)  $x = 6, y = 9$ . En déduire que le chiffre d'affaire du boulanger est d'environ 700. Pouvez-vous calculer plus précisément le chiffre d'affaire ? Il n'est pas demandé de faire des calculs exacts (et simples !) à la main, mais de se servir uniquement des graphiques obtenus par `Scilab`.

Bien entendu, la démarche précédente est propre à la dimension deux (il y a deux inconnues ( $x$  et  $y$ ) dans le problème) et on imagine mal l'appliquer à un problème à mille inconnues. Il existe cependant des algorithmes efficaces pour résoudre les problèmes de la programmation linéaire, par exemple l'algorithme de la fonction `linpro` de `Scilab`.

**Exercice 5.2** Retrouver les résultats de l'exercice précédent en utilisant la fonction `linpro`. Utiliser la commande `printf` pour afficher la solution optimale, le chiffre d'affaires, la quantité de matière première disponible, la quantité de matière première utilisée, la quantité de matière première restante, ...

**Exercice 5.3** Modifier le problème précédent en supposant que le boulanger produit deux autres variétés de pain de plus, vendues respectivement aux prix  $r$  et  $s$ . La production de  $z$  unités du premier pain et de  $t$  unités du second nécessite l'utilisation de  $u = 5x + 4y + 3z + t$  unités de farine,  $v = x + 2y + z + 2t$  unités de beurre, et  $w = 3x + 2y + z + 3t$  unités de sucre. Faire varier  $r$  et  $s$  et commenter les résultats obtenus. On prendra en particulier  $(r, s) = (0, 0)$ ,  $(r, s) = (55, 45)$  et  $(r, s) = (20, 45)$ .

```
r=55;s=45;
p=-[40;50;r;s];a=[80;24;36];M=[5,4,3,1;1,2,1,2;3,2,1,3];
MM=[M;-diag(ones(p))];aa=[a;zeros(p)];
x=linpro(p,MM,aa)
sol=x(1:length(p))
printf('solution optimale : \n');printf('%f ',sol);
printf('chiffre d'affaires : \n');printf('%f ',-p'*sol);
printf('matiere premiere disponible: \n');printf('%f ',a);
printf('matiere premiere utilisee: \n');printf('%f ',M*sol);
printf('matiere premiere restante: \n');printf('%f ',a-M*sol);
```