Université Pierre et Marie Curie — Année 2005-2006
Licence LM206 — 1er semestre

Initiation à `Scilab`

7 Équations différentielles

Cette séance s'intéresse à la résolution des équations (ou systèmes d'équations) différentielles avec `Scilab`. On rencontre en effet fréquemment de telles équations à résoudre dans de nombreux domaines d'applications (mécanique, chimie, biologie, etc). Après deux exemples de résolution d'équations d'ordre 1 puis 2 avec l'instruction `ode`, un problème de mécanique céleste est abordé.

Premiers exemples de résolution d'équations différentielles. Le logiciel `Scilab` permet de résoudre de manière approchée toute équation (ou système d'équations) différentielle du type $y' = f(t, y)$ complétée par la condition initiale $y(t_0) = y_0$ (sous réserve d'existence et d'unicité de la solution). L'instruction correspondante, de type "boite noire", s'appelle `ode` et nécessite la donnée de quatre arguments : la donnée initiale y_0, le temps initial t_0, les instants de calcul de la solution et la fonction f (toujours à deux arguments t et y). Par exemple, la série d'instructions

```
deff('dy=fct(t,y)','dy(1)=cos(t)*y(2) ;dy(2)=y(1)-y(2)')
t0=0 ;y0=[10 ;2] ;t=0 :0.1 :10 ;
z=ode(y0,t0,t,fct) ;
```

permet de calculer et de stocker dans la variable z les solutions du système d'équations différentielles (d'inconnues y_1 et y_2) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(t) &=& \cos(t)y_2(t), \\ y_2'(t) &=& y_1(t) - y_2(t), \\ y_1(0) &=& 10, \\ y_2(0) &=& 2 \end{array}\right.$$

aux instants $t = 0, 0.1, 0.2, \ldots$, jusqu'à $t = 10$. Pour tracer par exemple ensuite y_1 en fonction de t, on pourra alors taper `plot2d(t,z(1, :))`. A noter que la fonction `fct`, définie ici directement dans l'exécutable avec l'instruction `deff` peut aussi être définie dans un autre fichier. Même si l'équation ne comporte pas la variable t au second membre, il est important de noter que la fonction correspondante devra cependant avoir `t` pour premier argument. Grâce à ce formalisme, il est possible de résoudre avec `Scilab` toute équation d'ordre supérieur à 1, en récrivant celle ci comme un système d'équations d'ordre 1.

Exercice 7.1 Résoudre sur $[0, 10]$ avec `Scilab` les deux équations différentielles suivantes :

1. Équation de Bernoulli d'ordre 2 : $y' = -y + ty^2$ avec $y(0) = 1$.
2. Équation du pendule pesant : $y'' + \sin(y) = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0)$=1 et tracer la solution obtenue y en fonction de t.

Trajectoire d'un satellite terrestre. On recherche à présent la trajectoire d'un satellite lancé à partir d'une fusée. On rappelle que l'accélération vectorielle $\vec{a}$ d'un satellite terrestre assimilé à un point S (et de masse m) est donnée par la relation fondamentale de la dynamique $m\vec{a} = \vec{f}$ où la force gravitationnelle $\vec{f}$ est un vecteur

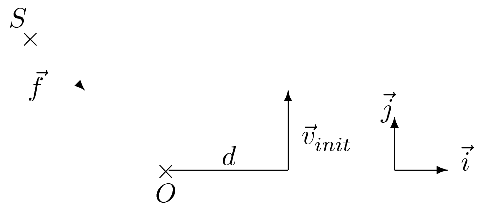

FIG. 1 – Trajectoire d'un satellite, O est le centre de la terre et S le satellite.

porté par la droite SO, dirigé de S vers O (centre de la terre) et de norme égale à $g\dfrac{m\,M}{OS^2}$ où $g = 6.67\,10^{-11}$ est la constante de gravitation universelle et $M = 5.98\,10^{24}\,kg$ est la masse de la terre.

Exercice 7.2 Sachant que le satellite a été lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_{init}$ comme sur la figure 1, à la distance $d = 6\,400\,km + 100\,km$ du centre de la terre, calculer sa trajectoire sur une journée et tracer celle-ci pour la vitesse initiale $\|\vec{v}_{init}\| = 8\,000\,m/s$, puis pour la vitesse $\|\vec{v}_{init}\| = 10\,000\,m/s$. Calculer l'apogée de la trajectoire, c'est-à-dire l'éloignement maximal de O. Que se passe-t-il pour $\|\vec{v}_{init}\| = 12\,000$?