Université Pierre et Marie Curie — Année 2005-2006
Licence LM206 — 1er semestre

Initiation à `Scilab`

8 Équations

Cette séance s'intéresse à la résolution d'équations ou de systèmes d'équations avec l'instruction `fsolve` de `Scilab`.

Premiers exemples de résolution d'équations ou systèmes d'équations. L'instruction fsolve permet de résoudre de manière approchée des systèmes d'équations du type $f(x) = 0$ où f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On présente ici deux exemples afin d'en comprendre le fonctionnement :

Exemple 8.1 $f(x) = x^4 + x^3 - 5$: on peut montrer facilement que cette équation admet une unique solution réelle positive x_0 (comment ?). Cependant, il n'existe pas de méthode permettant de la calculer explicitement. On peut en obtenir une excellente approximation en tapant simplement dans `Scilab` :

```
deff('y=f(x)','y=x^4+x^3-5') ; x0=fsolve(1,f)
```

On obtient alors $x_0 \simeq 1.2961533$. Le premier argument de `fsolve` (ici, le réel 1) correspond à une valeur approchée connue de la solution à calculer permettant à `Scilab` d'initier sa recherche. Ici, toute valeur strictement positive convient. Par contre, le choix de la valeur 0 donnera une solution fausse ($x_0 = 0$) et le choix d'une valeur négative conduira en général à l'obtention de la solution négative de l'équation $x^4 + x^3 - 5 = 0$ (en l'occurrence -1.8239745). Dans tous les cas, il sera donc préférable de vérifier que la valeur trouvée par `Scilab` est dans le domaine recherché (ici $\mathbb{R}^+$) mais aussi qu'elle est bien solution en vérifiant que $f(x_0)$ est proche de zéro.

Exemple 8.2 On pose $f(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_2^3 - 3, x_1^2 + x_2^2 - 2x_2)$: on peut montrer que ce système d'équations admet une unique solution dans le quart de plan ($x_1 > 0, x_2 > 0$). Afin d'en obtenir une approximation, on peut taper dans `Scilab` :

```
deff('y=f2(x)','y=[x(1)^3+x(2)^3-3,x(1)^2+x(2)^2-2*x(2)]') ;
x=fsolve([1,1],f2) f(x)
```

On obtient alors $x \simeq (0.9587068, 1.2843962)$ et $f(x) \simeq (-0.4440892\,10^{-15}, 0)$ ce qui confirme la validité de la solution obtenue.

Exercice 8.1 Montrer graphiquement avec `Scilab` puis mathématiquement que l'équation suivante a une unique solution :

$$2\cos(x) - x = 0, \quad \text{avec } x > 0.$$

Utiliser l'instruction `fsolve` de `Scilab` pour obtenir une valeur approchée de la solution.
Mêmes questions pour le système d'équations

$$\begin{cases} e^x - y = 0, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \qquad \text{avec } x > 0 \text{ et } y > 0.$$

Calcul d'une position par GPS (Global Positioning System) Le GPS est un système de positionnement basé sur le connaissance avec une grande précision de la distance du récepteur à trois satellites (situés à des orbites de l'ordre de $28\,000\,km$).

Le recepteur (assimilé à un point P) reçoit d'un satellite S_1 des informations permettant de calculer sa distance d_1 à ce satellite (voir la figure 2). Notons $\Omega_1(d)$ l'ensemble des points de la terre à la distance d du satellite S_1. On sait donc que $P \in \Omega_1(d_1)$. L'utilisation d'un deuxième satellite permet de dire que $P \in \Omega_1(d_1) \cap \Omega_2(d_2)$. Comme l'intersection de "courbes de niveaux" $\Omega_1(d_1)$ et $\Omega_2(d_2)$ n'est réduite à un seul point que dans le cas exceptionnel où ces courbes sont tangentes, l'utilisation d'un troisième satellite est nécessaire (et suffisante !) puisque

$$\Omega_1(d_1) \cap \Omega_2(d_2) \cap \Omega_3(d_3) = \{P\}.$$

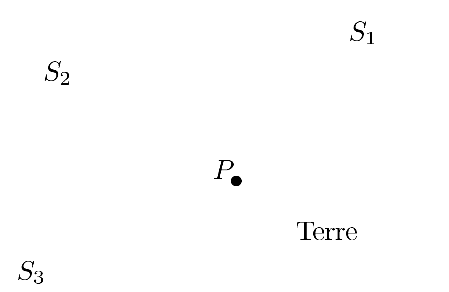

FIG. 2 – Le recepteur P est déterminé comme étant l'intersection de trois courbes. Chacune des courbes est constituée de l'ensemble des points situés à la même distance que le point P d'un satellite donné.

Exercice 8.2 On suppose que les trois satellites au moment du calcul de distance ont les positions suivantes dans un repère cartésien dont l'origine est le centre de la terre :

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & (-11\,716.227\,778\,km,\ -10\,118.754\,628\,km,\ 21\,741.083\,973\,km) \\ S_2 & = & (-12\,082.643\,974\,km,\ -20\,428.242\,179\,km,\ 11\,741.374\,154\,km) \\ S_3 & = & (\ \ 14\,373.286\,650\,km,\ -10\,448.439\,349\,km,\ 19\,596.404\,858\,km). \end{array}$$

Les trois distances respectives au récepteur ont été calculées et valent

$$d_1 = 22\,163.847\,742\,km, \quad d_2 = 21\,492.777\,482\,km, \quad d_3 = 21\,492.469\,326\,km.$$

Calculer avec l'instruction `fsolve` (et l'instruction `norm`) la position exacte du récepteur. Vérifier que celui-ci se trouve bien à la surface de la terre !