Projet *Scilab*

Il sera tenu compte de la rédaction, de l'explication des différentes commandes utilisées, du soin apporté à l'écriture des programmes *Scilab* (dont les commentaires) et de la pertinence des représentations graphiques.

Pour tout renseignement ou envoi de rapport au format électronique :
`dumas@ann.jussieu.fr` ou `guerrero@ann.jussieu.fr`.

1. Considérons le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{\delta}(\bar{y}(t) - y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

où $\bar{y}(t)$ et δ sont données.

1. En supposant $\bar{y}$ et δ constants, expliciter la solution exacte $y(t)$ de l'équation (1).

2. Écrire le schéma d'Euler explicite associé à cette équation sous forme d'une relation entre les termes y_{n+1}, y_n (c'est-à-dire les approximations de $y(t)$ aux temps t_{n+1} et t_n, respectivement), Δt (pas de temps du schéma), $\bar{y}$ et δ.

3. Comparer l'expression issue du schéma d'Euler avec l'évolution de la solution exacte $y(t^{n+1})$ depuis $y(t^n)$ en fonction de Δt, $\bar{y}$ et δ. En déduire que
$$y(t^{n+1}) \in [\min(y(t^n), \bar{y}), \max(y(t^n), \bar{y})]$$
et une condition de stabilité du schéma d'Euler explicite du type
$$1 - \frac{\Delta t}{\delta} > 0. \tag{2}$$

   Dans les questions qui suivent, nous considérerons $\delta = 10^{-4}$, $y_0 = 1/2$, $\bar{y}(t) \equiv 1$ et $t \in [0, T_{max}]$ avec $T_{max} = 20\delta$.

4. Écrire un programme *Scilab* permettant de résoudre numériquement le problème de Cauchy (1) par un schéma d'Euler explicite. Vérifier de façon numérique que la condition de stabilité précédente est nécessaire (on pourra prendre différentes valeurs de Δt vérifiant ou ne vérifiant pas cette condition et en donner des représentations graphiques pertinentes).

5. Écrire un programme *Scilab* permettant de résoudre numériquement le problème de Cauchy (1) par un schéma d'Euler implicite. Observer le comportement du schéma d'Euler implicite pour des valeurs de Δt identiques à celles prises à la question 4.

6. Vérifier numériquement (dont représentation graphique) les ordres de convergence des deux méthodes d'Euler.

7. Vérifier expérimentalement que l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 (schéma explicite) possède aussi une condition de stabilité. Pour cela, écrire un programme *Scilab* de l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 puis tester sa stabilité numérique sur l'équation (1) suivant différentes valeurs de Δt (relativement à δ). Que constatez vous ?

2. Considérons le système differentiel défini par

$$\begin{cases} Y'(t) = B_\delta(\bar{Y} - Y(t)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \tag{3}$$

où $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ et où sont donnés $\bar{Y} \in \mathbb{R}^m$ et $B_\delta \in \mathcal{M}_m$ (matrice carrée d'ordre m).

Si B_δ est une matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$, alors B_δ est semblable à la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_m^\delta & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_1^\delta \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_m^\delta \leq \ldots \leq \lambda_1^\delta$ à un changement de repère R près.

Dès lors, le système (3) est assimilable à un système du type

$$\begin{cases} x_i' = \lambda_i^\delta(\bar{x}_i - x_i) \\ \\ x_i(0) = x_{i0} \end{cases} \tag{4}$$

pour $i \in \{1 \ldots m\}$, c'est à dire un système d'équations découplées semblables à (1).

Si certaines valeurs propres $\{\lambda_j^\delta, 1 \leq j \leq p\}$ sont de l'ordre $O(\frac{1}{\delta})$ alors que les équations associées dans (4) sont soumises aux mêmes précédentes conditions de stabilité (2), les $\{x_j^\delta, 1 \leq j \leq p\}$ évoluent très rapidement vers leurs états d'équilibre $\bar{x_j}$ alors que les autres x_i continuent d'évoluer en temps.

Supposons maintenant que B_δ ne soit plus diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble du système est soumis à une condition de stabilité liée à la plus grande valeur propre de B_δ.

Pour la suite du problème, nous prendrons

$$B_\delta = R^{-1} \begin{pmatrix} 1/\delta & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2/\delta & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R, \quad R = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{Y_0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

et $\delta = 10^{-2}$.

1. Calculer (à l'aide de *Scilab*) les quatre valeurs propres réelles de B_δ.

2. Définir la condition de stabilité associée à ce système pour le schéma d'Euler explicite, puis écrire un programme *Scilab* résolvant par ce même schéma le système (3).

3. Représenter graphiquement l'évolution de la solution

$$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))$$

sur l'intervalle $[0, T]$, où $T = 2/\lambda_m^\delta$ est défini comme le temps d'observation du système.

4. Écrire une méthode d'Euler implicite résolvant le système (3) et représenter graphiquement la solution.

5. Comparer avec les résultats obtenus avec la fonction `ode` de *Scilab* .

6. Quels types d'instabilités pouvez-vous constater avec le schéma d'Euler explicite appliqué à (3) suivant la valeur de Δt ? Donner quelques représentations typiques.