Projet *Scilab* bis

Il sera tenu compte de la rédaction, de l'explication des différentes commandes utilisées, du soin apporté à l'écriture des programmes *Scilab* (dont les commentaires) et de la pertinence des représentations graphiques.

Pour tout renseignement ou envoi de rapport au format électronique : `dumas@ann.jussieu.fr` ou `guerrero@ann.jussieu.fr`

On s'intéresse dans ce projet à quelques modèles utilisés en biomathématiques pour modéliser l'évolution de populations d'espèces animales. Ces modèles sont élémentaires mais permettent de mettre en évidence quelques phénomènes intéressants. Nous désignerons par $N(t)$ la population d'une espèce animale donnée à l'instant t et noterons $N(0) = N_0 \in \mathbb{R}_+$ sa donnée initiale.

1. Le modèle de croissance logistique

En 1836, Verhulst propose l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K}) \tag{1}$$

où r et K désignent deux constantes positives. Ce modèle présente deux points d'équilibre, $N = 0$ et $N = K$ c'est à dire deux solutions constantes vérifiant l'équation (1). La nature de ces deux points d'équilibre est très différente : le premier est dit instable, à savoir qu'une légère perturation de la donnée initiale autour du point d'équilibre va modifier totalement la solution alors que le second est au contraire stable, le système dans ce cas revenant vers sa position d'équilibre. Dans ce modèle, la constante r mesure la vitesse de retour à l'équilibre.

1. En reconnaissant une équation de type Bernoulli, déterminer l'unique solution de (1) en fonction de N_0 ainsi que sa limite en $+\infty$.

2. Ecrire un programme Scilab permettant de comparer la solution exacte précédente et une solution approchée obtenue, soit à l'aide de la méthode d'Euler explicite, soit à l'aide de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4, pour les valeurs des paramètres $r = 1$ et $K = 3$. Etudier la vitesse de convergence de ces deux méthodes sur l'intervalle $[0, 10]$ en prenant différentes valeurs de pas de temps.

2. Le modèle du ver du bourgeon de l'épinette

Les vers du bourgeon de l'épinette sont un fléau national pour cet arbre au Canada. Un modèle d'évolution a été proposé par Ludwig-Jones et Holling en 1978. L'équation différentielle décrivant la population du ver est la suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K}) - p(N(t)) \tag{2}$$

où $p(N)$ représente un terme de prédation lié à la densité d'oiseaux :

$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$$

et r K A et B sont les 4 constantes, toutes positives, du modèle. Afin de reduire le nombre de paramètres, on effectue les changements suivants :

$$u = \frac{N}{A}, \quad r = \frac{Ar}{B}, \quad q = \frac{K}{A}, \quad \tau = \frac{Bt}{A}$$

permettant de se ramener à l'équation différentielle :

$$\frac{du(t)}{d\tau} = ru(\tau)(1 - \frac{u(\tau)}{q}) - \frac{u^2(\tau)}{1 + u^2(\tau)} \tag{3}$$

Afin de rechercher les solutions constantes de (3), on est amené à résoudre l'équation non linéaire suivante :

$$ru(1 - \frac{u}{q}) - \frac{u^2}{1 + u^2} = 0 \tag{4}$$

En fonction des valeurs de r et q, on montre que celle-ci possède 1, 2 ou 3 solutions.

1. Justifier le passage de l'équation (2) à l'équation (3).

2. Utiliser l'instruction `ode` de Scilab afin de représenter de manière approchée la solution de l'équation (3) pour les paramètres $r = 0.4$ et $q = 10$ et les valeurs initiales respectives $N_0 = 0.1, 2, 5, 10$. Qu'observe t-on ?

3. Reprogrammer la méthode de Newton avec Scilab et déterminer l'ensemble des solutions de l'équation algébrique (4) avec $r = 0.4$ et $q = 10$ en faisant varier le point u_0 initial de la méthode.

4. Déterminer en fonction des résultats précédents, l'ensemble des points d'équilibre de l'équation (3) pour les paramètres $r = 0.4$ et $q = 10$ ainsi que leur stabilité.

5. Effectuer et représenter un régionnement de l'espace des paramètres (q, r) en fonction du nombre (1, 2 ou 3) de points d'équilibre de l'équation (3). On pourra remarquer que les cas de transition entre 1 et 3 points d'équilibre correspondent à la situation où un certain polynôme possède une racine double.